Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Vektorianalyysi
Malliratkaisut 1 (Mikko Kemppainen)
12.-16.9.2011

1. Milloin Cauchy-Schwarzin epäyhtälössä pätee yhtäsuuruus? Anna tarkka perustelu.
   Ratkaisu:
   Osoitamme, että Cauchy-Schwarzin epäyhtälössä

   $$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

   pätee yhtäsuuruus täsmälleen silloin, kun vektorit x ja y ovat lineaarisesti riippuvia. Mikäli x ja y ovat lineaarisesti riippuvia, eli pätee $x = ty$ jollakin $t \in \mathbb{R}$, niin näemme sisätulon ominaisuuksia käyttämällä, että

   $$|\langle x, y\rangle| = |\langle ty, y\rangle| = |t||\langle y, y\rangle| = |t|\|y\|^2 = \|ty\|\|y\| = \|x\|\|y\|,$$

   mikä oli todistettava. Toisaalta, jos x ja y ovat lineaarisesti riippumattomia ja $y \neq 0$, niin kaikilla $t \in \mathbb{R}$ on voimassa $x \neq ty$ ja siten

   $$\begin{aligned} 0 < \|x + ty\|^2 = \langle x + ty, x + ty\rangle &= \langle x, x\rangle + \langle x, ty\rangle + \langle ty, x\rangle + \langle ty, ty\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2\|y\|^2 = p(t). \end{aligned}$$

   Toisen asteen polynomilla p ei siis ole nollakohtia, joten sen diskriminantin D on oltava negatiivinen, toisin sanoin $D = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 < 0$. Siispä $|\langle x, y\rangle| < \|x\|\|y\|$, kuten haluttiin.

2. Osoita ns. *kolmioepäyhtälön vasen puoli*: kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ pätee

   $$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|.$$

   Todistus:
   Olkoot $x, y \in \mathbb{R}^n$. Kolmioepäyhtälön nojalla voimassa

   $$\|x\| = \|(x + y) - y\| \leq \|x + y\| + \|y\|,$$

   joten

   $$\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|.$$

   Aivan vastaavasti

   $$\|y\| = \|(y + x) - x\| \leq \|y + x\| + \|x\|,$$

   eli

   $$\|y\| - \|x\| \leq \|y + x\| = \|x + y\|.$$

   On siis osoitettu, että

   $$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|.$$

3. Osoita, että $\mathbb{R}^n$:n euklidiselle normille $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ pätee *suunnikassääntö*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Osaatko sanoa mistä tämä nimi tulee?
Todistus:
Suoraan laskemalla nähdään, että kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ on voimassa

$$\begin{aligned}
&\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \\
&= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle + \langle x, -y\rangle + \langle -y, x\rangle + \langle -y, -y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.
\end{aligned}$$

Tarkastellaan suunnikasta, jonka sivut muodostuvat vektoreista x ja y. Tällaisen suunnikaan lävistäjät ovat $x+y$ ja $x-y$. Geometrian suunnikassääntö kertoo suunnikkaan sivujen pituuksien neliöiden summan $\|x\|^2+\|y\|^2+\|x\|^2+\|y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2$ olevan yhtäsuuri kuin lävistäjien pituuksien neliöiden summan $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$.

4. Olkoon $\|x\|$ yllä määritelty vektorin $x = (x_1, \dots, x_n)$ euklidinen normi. Määritellään nyt

$$|x| = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Osoita, että on olemassa vakiot $C_1, C_2 > 0$ siten, että kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$C_1\|x\| \le |x| \le C_2\|x\|.$$

Sanomme tällöin, että normit $\|x\|$ ja $|x|$ ovat ekvivalentit.
Todistus:
Osoitetaan ensin, että $\|x\| \le |x|$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, jolloin voimme valita $C_1 = 1$. Olkoon $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Kirjoittamalla x kantavektorien $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ avulla ja käyttämällä kolmioepäyhtälöä saadaan

$$\|x\| = \Big\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\Big\| \le \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

sillä $\|e_i\| = 1$ kaikilla $i = 1, \dots, n$.
Osoitetaan sitten, että $|x| \le \sqrt{n}\|x\|$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, jolloin voimme valita $C_2 = \sqrt{n}$. Olkoon jälleen $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Esitämme normin $|x|$ vektorien $(|x_1|, \dots, |x_n|)$ ja $(1, \dots, 1)$ sisätulona ja käytämme Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä, jolloin

$$\begin{aligned}
|x| &= \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot 1 \\
&= \langle (|x_1|, \dots, |x_n|), (1, \dots, 1)\rangle \le \|(|x_1|, \dots, |x_n|)\|\|(1, \dots, 1)\|.
\end{aligned}$$

Nyt $\|(|x_1|, \dots, |x_n|)\| = \|x\|$ ja $\|(1, \dots, 1)\| = \sqrt{n}$, joten saamme

$$|x| \leq \sqrt{n}\|x\|,$$

kuten halusimmekin.

Olemme siis kaikenkaikkiaan osoittaneet, että kaikilla vektoreilla $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$\|x\| \leq |x| \leq \sqrt{n}\|x\|.$$

Huomaa erityisesti vakion $C_2 = \sqrt{n}$ riippuvuus dimensiosta n.

5. Kutsumme kuvausta $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sisätuloksi*, jos sillä on seuraavat ominaisuudet:

   - $(x, y) = (y, x), \quad x, y \in \mathbb{R}^n$
   - $(x, y + z) = (x, y) + (x, z), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n$
   - $(ax, y) = a(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}$
   - $(x, x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $(x, x) = 0$ jos ja vain jos $x = 0$

   Onko olemassa sisätuloa joka määräisi edellisen tehtävän normin, eli pätisi

   $$|x| = (x, x)^{1/2}?$$

   Ratkaisu:
   Suunnikassäännön todistuksesta nähdään sen pätevän kaikille sisätuloille. Jos siis on olemassa sisätulo $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, jolla

   $$|x| = (x, x)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

   niin kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ on voimassa

   $$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

   Tapauksessa $n = 1$ pätee $\|x\| = |x|$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, jolloin normin $|\cdot|$ määrää tavallinen reaalilukujen (sisä)tulo. Jos taas $n \geq 2$, niin valitsemalla $x = (1, 0 \dots, 0)$ ja $y = (0, 1, 0, \dots, 0)$ saadaan

   $$|x + y| = |(1, 1, 0, \dots, 0)| = 2 \quad \text{ja} \quad |x - y| = |(1, -1, 0, \dots, 0)| = 2.$$

   Nyt

   $$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 8,$$

   mutta

   $$2|x|^2 + 2|y|^2 = 2|(1, 0, \dots, 0)|^2 + 2|(0, 1, 0, \dots, 0)|^2 = 4 \neq 8,$$

   eli suunnikassääntö ei päde. Tapauksessa $n \geq 2$ ei siis ole olemassa sisätuloa $(\cdot, \cdot)$, joka määrittelisi normin $|\cdot|$ kaavalla $|x| = (x, x)^{1/2}$.

6. ([Martio, t.1.1.1]) Olkoon $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja $\|x\| = \|y\| = 1$. Määritä vektorin $x - y$ suurin mahdollinen pituus.
Ratkaisu:
Kolmioepäyhtälön nojalla kaikilla yksikkövektoreilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ on voimassa

$$\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2.$$

Toisaalta, jos $y = -x$, niin $\|x - y\| = \|x + x\| = 2\|x\| = 2$. Yksikkövektoreiden $x, y \in \mathbb{R}^n$ erotuksen $x - y$ suurin mahdollinen pituus on siten 2.