Vektorianalyysi

Viides luentoviikko, syksy 2011

Alla tiivistelmä viidennen luentoviikon aikana käsitellyistä asioista.

- Keskeinen teema luennoilla on ollut funktion käytöksen ymmärtäminen kriitisten pisteiden ympäristössä. Tämä perustuu Taylorin kehitelmään kolme kertaa jatkuvasti derivoituvalle funktiolle:

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{ij} f(x)\, h_i h_j + O(\|h\|^3),$$

  missä $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Tätä varten olimme aloittaneet kertauksen symmetristen reaalikertoimisten matriisien ominaisarvoista ja -vektoreista. Tämä kertaus saatettiin päätökseen tiistain luennolla.

- Käyttäen ns. Hessin matriisia

$$\nabla^2 f(x) = (\partial_{ij} f(x))_{i,j=1}^{n}$$

  voimme siis kirjoittaa krittisen pisteen x ympäristössä

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x) h, h \rangle + O(\|h\|^3).$$

- Seuraavaksi tutkimme kriittisessä pisteessä x neliömuotoa

$$q(h) = \langle \nabla^2 f(x) h, h \rangle.$$

  Osoitimme seuraavat seikat: 1) jos $q(h))$ on positiividefiniitti, niin kriittinen piste x on lokaali minimi, 2) jos $q(h)$ on negatiividefiniitti, niin kriittinen piste x on lokaali maksimi ja 3) jos $q(h)$ on indefiniitti, kyseesä ei ole lokaali ääriarvo. Viimeinen kohta oli itseasiassa viidensien harjouitusten viimeinen tehtävä.

- Loppu aika käytettiin esimerkkien läpikäymiseen.