Vektorianalyysi

Neljäs luentoviikko, syksy 2011

Alla tiivistelmä neljännen viikon aikana käsitellyistä asioista.

- Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \neq 0$. Olkoon $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin, ja $x \in D$. Tarkastellaan *erotusosamäärää pisteessä x suuntaan α*:
$$\frac{f(x + t\alpha) - f(x)}{t}.$$
Mikäli tällä on raja–arvo, kun $t \to 0$, kutsumme sitä *funktion f derivaataksi suuntaan α pisteessä x*, ja käytämme siitä merkintää $\partial_\alpha f(x)$. Huomaa, että mikäli α on k:s koordinaattivektori e_k, niin tämä derivaattaa yhtyy k:nteen osittaisderivaattaan.

- Lopuksi kätevä tapa laskea suunnattu derivaatta: mikäli f on differentioituva pisteessä x, niin pätee
$$\partial_\alpha f(x) = \langle \nabla f(x), \alpha \rangle.$$

- Keskeinen teema luennoilla on ollut funktion käytöksen ymmärtäminen kriitisten pisteiden ympäristössä. Aluksi käsittelimme Taylorin kehitelmän kolme kertaa jatkuvasti derivoituvalle kahden muuttujan funktiolle:
$$f(x + h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \partial_{ij} f(x)\, h_i h_j + O(\|h\|^3),$$
missä $h = (h_1, h_2)$.

- Määrittelimme, että piste $x = (x_1, x_2)$ on funktion f *kriittinen piste*, jos $\nabla f(x) = 0$. Kriittisen pisteen ympäristössä funktion käytös siis määräytyy termeistä
$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \partial_{ij} f(x)\, h_i h_j + O(\|h\|^3).$$

- Jotta voisimme ymmärtää kuinka ylläolevassa lausekkeessa oleva *neliömuoto* $\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \partial_{ij} f(x)\, h_i h_j$ käyttäytyy kertaisimme torstaina symmetristen reaalikertoimisten matriisien ominaisarvojen ja -vektorien ominaisuuksia. Tämä kertaus jatkuu vielä maanantaina 3.10.