Vektorianalyysi

Kolmas luentoviikko, syksy 2011

Alla tiivistelmä kolmannen viikon aikana käsitellyistä asioista.

- Maanantain luento jouduttiin perumaan sairauden vuoksi. Tiistain luennolla palasimme vielä kerran differentioituvuuden käsitteeseen ja todistimme seuraavan tärkeän tuloksen: Olkoon $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Oletetaan, että kaikki osittaisderivaatat $\partial_k f$, $k = 1, \ldots, n$, ovat olemassa ja jatkuvia D:ssä. Tällöin f on differentioituva D:ssä. Huomaa, että myös f:n jatkuvuus seuraa oletuksista.

- Seuraavaksi yleistimme derivaatan useamman muuttujan *vektoriarvoisille* kuvauksille. Olkoon $f : D \to \mathbb{R}^m$, missä $D \subset \mathbb{R}^n$ on avoin. Jos kaikki koordinaattifunktiot f_i ovat differentioituvia, niin pätee

  $$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(\|h\|),$$

  missä $m \times n$–matriisille $f'(x)$ pätee

  $$f'(x)_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}.$$

  Matriisia $f'(x)$ kutsutaan kuvauksen f derivaatta-matriisiksi pisteessä x.

- Torstaina käsittelimme ketjusääntöä vektoriarvoisille kuvauksille. Lyhyesti tämä voidaan kirjoittaa derivaatta-matriiseja käyttäen seuraavasti. Olkoot $g : D \to D'$ ja $f : D' \to \mathbb{R}^p$ differentioituvia kuvauksia, missä $D \subset \mathbb{R}^n$ ja $D' \subset \mathbb{R}^m$ ovat avoimia. Yhdistetty kuvaus $f \circ g$ on tällöin myös differentioituva, ja sen derivaatta-matriisi saadaan matriisitulona

  $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

- Määrittelimme myös, että kuvaus $f : D \to D'$, D, $D' \subset \mathbb{R}^n$ avoimia, on *diffeomorfismi*, jos sillä on käänteiskuvaus $f^{-1} : D' \to D$, joka on myös differentioituva. Huomaa, että ketjusäännön nojalla diffeomorfismin derivaatta-matriisi on kääntyvä, ja

  $$(f^{-1})'(f(x)) = f'(x)^{-1}.$$

- Gradientin geometriseen merkitykseen palaamme vielä uudestaan. Differentoituvalle funktiolle kuitenkin totesimme, että se kasvaa annetussa pisteessä voimakkaimmin gradientin suuntaan, ja vähenee nopeimmin gradientille vastakkaiseen suuntaan. Mikäli $\nabla f(x) = 0$, ei tämä tarkastelu ole oikein mielekäs. Funktion f käytöstä näissä pisteissä x tarkastelemme erikseen myöhemmin.