# Vektorianalyysi

Toinen luentoviikko, syksy 2011

Alla tiivistelmä toisen viikon aikana käsitellyistä asioista.

- Joukko $F \subset \mathbb{R}^n$ on *suljettu*, jos siitä että
$$x = \lim_{k\to\infty} x^k, \quad x^k \in F \text{ kaikilla } k$$
seuraa aina että $x \in F$. Joukko on siis suljettu, jos suppenevat jonot eivät vie sieltä ulos.

- *Avoin joukko* määriteltiin suljetun joukon komplementtina. Tarkemmin, joukko $A$ on avoin, jos sen komplementti $\mathbb{R}^n \setminus$ on suljettu. Huomaa, että koska koko avaruus $\mathbb{R}^n$ on suljettu, niin tyhjä joukko on avoin.

- Avoimelle joukolle voidaan antaa myös havainnollisempi karakterisointi: joukko $A$ on avoin jos ja vain jos jokaisella $x \in A$ on olemassa $\delta(x) > 0$ siten että avoin $x$–keskinen $\delta(x)$–säteinen kuula $B_{\delta(x)}(x)$ sisältyy myös $A$:han. Yleisemmin, niitä mielivaltasien joukon $B$ pisteitä $x$, joille on olemassa $\delta(x) > 0$ siten että $B_{\delta(x)}(x) \subset B$ kutsutaan joukon $B$ *sisäpisteiksi*. Joukko on siis avoin, jos ja vain jos sen jokainen piste on sisäpiste. Huomaa, että $\mathbb{R}^n$ on siis myös avoin joukko, joten sen komplementti tyhjä joukko on suljettu. Lopuksi määrittelimme, että $K \subset \mathbb{R}^n$ on *kompakti*, mikäli se on rajoitettu ja suljettu.

- Funktion $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ jatkuvuus märitellään tavalliseen tapaan: $f$ on jatkuva pisteessä $x \in A$, jos $\lim_{k\to\infty} f(x^k) \to f(x)$ jokaisella $A$:n jonolla $(x^k)$, jolla $\lim_{k\to\infty} x^k = x$. Jatkuvilla funktioilla on Analyysin kursseilta tutut perusominaisuudet: erityisesti jatkuvien funktioiden (äärelliset) summat ja tulot ovat aina jatkuvia.

- Jos $D \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, ja $f : D \to \mathbb{R}$, niin määrittelemme funktion $f$ osittaisderivaatan muuttujan $x_k$ suhteen pisteessä $x \in D$ erotusosamäärän raja-arvona
$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\lambda}, \quad h = \lambda e_k,$$
mikäli tämä raja–arvo on olemassa. Tässä $e_k$ on $k$:s yksikkökoordinaatti vektori. Käytämme osittaisderivaatalle seuraavia vaihtoehtoisia merkintöjä
$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}, \quad \partial_k f(x).$$

- Päinvastoin kuin yhdenmuuttujan tapauksessa, ei osittaisderivaattojen olemassaolosta yleisessä tilanteessa seuraa edes jatkuvuutta: esimerkkinä funktio

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, \text{ jos } x_1 = 0 \text{ tai } x_2 = 0, \\ 1, \text{ muulloin.} \end{cases}$$

  Tämä ei ole jatkuva origossa, mutta sillä on olemassa osittaisderivaatat

$$\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0.$$

- Saadaksemme paremman kontrollin funktion käytökselle sen derivaattojen avulla määrittelemme, että $f$ on *differentioituva* pisteessä $x$, mikäli on olemassa reaaliarvoinen funktio $\varepsilon(x;h)$ siten, että kaikilla $h \in \mathbb{R}^n$ joilla on riittävän pieni normi, pätee

$$f(x+h) - f(x) = \langle \nabla f(x), h \rangle + \|h\| \varepsilon(x;h),$$

  missä $\lim_{h \to 0} \varepsilon(x;h) = 0$ ja $\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x))$ on $f$:n *gradientti* pisteessä $x$. Nyt pätee, että pisteessä $x$ differentioituva funktio on aina myös jatkuva $x$:ssä.