Vektorianalyysi

Ensimmäinen luentoviikko, syksy 2011

Alla tiivistelmä ensimmäisen viikon aikana käsitellyistä asioista.

- Merkitään $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n);\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$. Tämä on *n-ulotteinen euklidinen avaruus*. Luvut x_i ovat vektorin x koordinaatteja. Kahden vektorin $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *summa* on

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

  Jos $\alpha \in \mathbb{R}$, määrittelemme edelleen

$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

- Kahden vektorin x ja y välinen *sisätulo (eli skalaari - tai pistetulo)* määritellään asettamalla

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

  Tällä on seuraavat ominaisuudet:

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \text{(Kommutatiivisuus)}$$

$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle = \langle x, \alpha y\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \quad \text{(Osittelulait)}$$

  Keskeinen sisätulon ominaisuus on *Cauchy-Schwarzin epäyhtälö*:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

- Vektorin $x \in \mathbb{R}^n$ *normi* eli *pituus* määritellään asettamlla

$$\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}.$$

  Olennaista on että tämä normi on sisätulon määräämä: $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$. Normilla on seuraavat ominaisuudet:

$$\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \text{ jos ja vain jos } x = 0.$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{Kolmioepäyhtälö.}$$

- Seuraavaksi määrittelemme jonojen konvergenssin. Tarkastellaan jonoa $\mathbb{R}^n$:n vektoreita $x_\nu = ((x_\nu)_1, \ldots, (x_\nu)_n)$, $k = 1, 2, \ldots$. Määrittelemme

  $$x = \lim_{\nu \to \infty} x_\nu, \quad \text{jos} \quad \lim_{\nu \to \infty} \|x - x_\nu\| = 0.$$

  Tämä on yhtäpitävää sen kanssa että koordinaatti–jonot suppenevat:

  $$x = \lim_{\nu \to \infty} x_\nu \quad \text{jos ja vain jos } x_p = \lim_{k \to \infty} (x_\nu)_p,\ p = 1, \ldots, n.$$

- Pisteen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ jossain ympäristössä määritelty funktio f on *jatkuva*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten että $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Määritelmä on muodollisesti samankaltaine kuin yhden muuttujan tapauksessa. Olemme vain korvanneet lähtöpuolella itseiarvon $|x - x_0|$ erotuksen $x - x_0$ normilla.