Vektorianalyysi

Harjoitus 8, syksy 2011

Tehtävät on jaettu kahteen osaan. Ensimmäisen osan tehtävät, eli *lämmittelytehtävät*, on tarkoitettu itsenäisesti ratkaistaviksi, ja tehtävän lopussa on myös kerrottu oikea vastaus. Näitä ei ole tarkoitus käsitellä laskuharjoituksissa. Jos ne tuntuvat itsestäänselviltä, voit ne hyvällä omallatunnolla sivuuttaa. Tarkoitus on vain kehittää hieman perulaskujen mukanaan tuomaa rutiinia. Voit toki kysyä harjoituksissa, tai luennoilla, neuvoja mikäli et saa jotain tehtävää ratkaistua. Toisen osan tehtävät, eli *laskaritehtävät*, käsitellään harjoituksissa, ja ne otetaan huomioon kurssin suorituksessa.

Lämmittelytehtävät. Näissä tehtävissä on tarkoitus kerrata suorien ja tasojen teoriaa.

1. Laske ristitulo $a \times b$, kun $a = (1, 1, 1)$ ja $b = (1, 2, -1)$. **Ratk.:** $(-3, 2, 1)$**.**
2. Osoita, että $a \times b$ on aina kohtisuorassa vektoreita a ja b vastaan.

Laskaritehtävät.

1. Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y, xy, z^3)$. Missä pisteissä kuvaus f on lokaali diffeomorfismi?
2. Määritä ellipsoidin $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 6\}$ tangenttitason yhtälö pisteessä $(1, 1, 2)$.
3. Osoitettava, että yhtälö $x^2 - ze^{x+y+z} = 0$ määrää jossain origon ympäristössä pinnan. Määritä origoon piirretyn tangenttitason yhtälö.
4. Olkoon f kahden muuttujan kaksi kertaa derivoituva funktio, jolla yhtälö $f(x, y) = 0$ määrää pisteen (x, y) ympäristössä funktion $y = \phi(x)$. Määritä funktion ϕ toinen derivaatta pisteessä x funktion f osittaisderivaattojen avulla.
5. Määritä funktion f, $f(x, y) = x^3 - xy^2$, suurin ja pienin arvo joukossa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1\}$.
6. Määritä funktion f, $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, suurin ja pienin arvo suorakaiteessa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le x \le 2\}$. **Vihje**: Nyt ei ehkä kannata yrittää Lagrangen kertojia.