Vektorianalyysi

Harjoitus 5, syksy 2011

Tehtävät on jaettu kahteen osaan. Ensimmäisen osan tehtävät, eli *lämmittelytehtävät*, on tarkoitettu itsenäisesti ratkaistaviksi, ja tehtävän lopussa on myös kerrottu oikea vastaus. Näitä ei ole tarkoitus käsitellä laskuharjoituksissa. Jos ne tuntuvat itsestäänselviltä, voit ne hyvällä omallatunnolla sivuuttaa. Tarkoitus on vain kehittää hieman perulaskujen mukanaan tuomaa rutiinia. Voit toki kysyä harjoituksissa, tai luennoilla, neuvoja mikäli et saa jotain tehtävää ratkaistua. Toisen osan tehtävät, eli *laskaritehtävät*, käsitellään harjoituksissa, ja ne otetaan huomioon kurssin suorituksessa.

Lämmittelytehtävät.

1. Laske matriisin
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
ominaisarvot.

   Ratk. $(1 \pm \sqrt{17})/2$.

2. Laske funktion $g(x_1, x_2) = x_1 \cos(x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, origossa muodostetun Taylorin kehitelmän kolme ensimmäistä termiä.

   Ratk. Kolmen ensimmäisen termin summa on x_1.

Laskaritehtävät.

Määritä seuraavien kolmen funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kriittiset pisteet, ja mahdollisten lokaalien ääriarvokohtien laatu:

1. $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2^2}$.
2. $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 - x_2^2}$.
3. $f(x_1, x_2) = x_1^2(1 + x_2^2)$.
4. Kuinka neliömuoto
$$q(h) = h_1^2 + 4h_1h_2 + h_2^2,\ h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2,$$
käyttäytyy origon ympäristössä?

5. Olkoon $q(h) = \langle Ah, h \rangle$ symmetrisen matriisn A määräämä positiividefiniitti neliömuoto tasossa $\mathbb{R}^2$. Osoita, että se on *alhaalta rajoitettu*, eli että on olemassa vakio $C > 0$ siten että
$$q(h) \geq C\|h\|^2,\ h \in \mathbb{R}^2.$$

6. Oletetaan, että funktion $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ Hessen matriisi $\nabla^2 f(x_0)$ krittisessä pisteessä x_0 on indefiniitti. Osoita, että f:llä ei ole lokaalia ääriarvokohtaa pisteessä x_0.