Vektorianalyysi

Harjoitus 4, syksy 2011

Tehtävät on jaettu kahteen osaan. Ensimmäisen osan tehtävät, eli *lämmittelytehtävät*, on tarkoitettu itsenäisesti ratkaistaviksi, ja tehtävän lopussa on myös kerrottu oikea vastaus. Näitä ei ole tarkoitus käsitellä laskuharjoituksissa. Jos ne tuntuvat itsestäänselviltä, voit ne hyvällä omallatunnolla sivuuttaa. Tarkoitus on vain kehittää hieman perulaskujen mukanaan tuomaa rutiinia. Voit toki kysyä harjoituksissa, tai luennoilla, neuvoja mikäli et saa jotain tehtävää ratkaistua. Toisen osan tehtävät, eli *laskaritehtävät*, käsitellään harjoituksissa, ja ne otetaan huomioon kurssin suorituksessa.

Lämmittelytehtävät.

1. Laske funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$ derivaattaa suuntaan $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ pisteessä $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

   Ratk. $10\sqrt{2}$.

2. Laske funktion $g(t) = t\cos(t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, origossa muodostetun Taylorin kehitelmän kolme ensimmäistä termiä.

   Ratk. Kolmen ensimmäisen termin summa on t.

Laskaritehtävät.

1. ([Martio, h. 2.8:1]) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \sin(x_1)\cos(x_1 x_2)$. Määritä derivaatat $\partial_2\partial_2 f$, $\partial_1\partial_2 f$ ja $\partial_2\partial_2\partial_2 f$.

2. ([Martio, h. 2.7:1]). Osoita, että suunnatulle derivaatalle pätee $\partial_{-v} f(x) = -\partial_v f(x)$.

3. ([Martio, h. 2.7:3]) Maaston korkeus pisteessä (x, y) on

   $$h(x, y) = \frac{10}{3 + x^2 + 2y^2}.$$

   Pisteen $(3, 2)$ kauttaa kulkee puro. Määritä puron suunta tässä pisteessä.

4. ([Martio, h. 2.8:2]) Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin. Funktio $u \in C^2(D)$ on **harmoninen** joukossa D, jos

$$\partial_1\partial_1 u + \partial_2\partial_2 u = 0$$

D:n jokaisessa pisteessä. Osoita, että funktio

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2^2$$

on harmoninen koko tasossa. Anna esimerkki C^2–funktiosta, joka ei ole harmoninen $\mathbb{R}^2$:ssa.

5. ([Martio, h. 2.8:3]) Onko olemassa funktiota $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jonka toisen kertaluvun osittaisderivaatta $\partial_2\partial_2 f$ on olemassa koko tasossa, mutta ei ole jatkuva?

6. ([Martio, h. 2.8:4]). Yhtälön

$$x + 2y + z + e^{2z} = 1$$

ratkaisu voidaan esittää muodossa $z = f(x, y)$ sopivalla f, kun (x, y) on lähellä origoa. Käyttäen tätä tietoa määritä $f(0, 0)$, $\partial_1 f(0, 0)$ ja $\partial_1\partial_2 f(0, 0)$.