Vektorianalyysi

Harjoitus 3, syksy 2011

Tehtävät on jaettu kahteen osaan. Ensimmäisen osan tehtävät, eli *lämmittelytehtävät*, on tarkoitettu itsenäisesti ratkaistaviksi, ja tehtävän lopussa on myös kerrottu oikea vastaus. Näitä ei ole tarkoitus käsitellä laskuharjoituksissa. Jos ne tuntuvat itsestäänselviltä, voit ne hyvällä omallatunnolla sivuuttaa. Tarkoitus on vain kehittää hieman perulaskujen mukanaan tuomaa rutiinia. Voit toki kysyä harjoituksissa, tai luennoilla, neuvoja mikäli et saa jotain tehtävää ratkaistua. Toisen osan tehtävät, eli *laskaritehtävät*, käsitellään harjoituksissa, ja ne otetaan huomioon kurssin suorituksessa.

Lämmittelytehtävät.

1. Laske funktion $f(x) = x_1^3 \cos(x_2)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, gradientti.

   Ratk. $\nabla f(x) = (3x_1^2 \cos(x_2), -x_1^3 \sin(x_2))$.

2. Laske funktion $g(x) = x_1^4 \cos(x_2^2)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, gradientti.

   Ratk. $\nabla g(x) = (4x_1^3 \cos(x_2^2), -2x_1^4 x_2 \sin(x_2^2))$.

3. Laske funktion

   $$h(x) = \frac{x_1^3 \cos(x_2)}{\sin(x_3)},\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_3 \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z},$$

   gradientti.

   Ratk.

   $$\nabla h(x) = \left(\frac{3x_1^2 \cos(x_2)}{\sin(x_3)}, \frac{-x_1^3 \sin(x_2)}{\sin(x_3)}, \frac{-x_1^3 \cos(x_2)\cos(x_3)}{\sin^2(x_3)} \right).$$

Laskaritehtävät.

1. ([Martio, h.2.4:1]) Määritä funktion

   $$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \|x\|^{\|x\|},$$

   gradientti.

2. ([Martio, h. 2.4:2]) Osoita, että funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x_1^3/||x||, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases}$$

on differentioituva origossa.

3. ([Martio, h. 2.4:3]) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ja $\nabla f(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$. Osoita, että f on vakiofunktio.

4. ([Martio, h.2.7:2]) Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differentioituva funktio, joka on parillinen, eli $f(-x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että $\nabla f(-x) = -\nabla f(x)$. Määritä tällöin $\nabla f(0)$.

5. ([Martio, h. 2.6:2]) Laske kuvauksen $f(x) = (e^{x_2}, x_1 x_2)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, derivaatta $f'(x)$ pisteessä $x = (1, 1)$.

6. ([Martio, h. 2.6:1], ainakin melkein) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$. Osoita, että f on differentoituva pisteessä $x \in \mathbb{R}^2$ jos ja vain jos koordinaattifunktiot f_1 ja f_2 ovat differentioituvia pisteessä $x \in \mathbb{R}^2$.

   Huom. Luennoilla todistimme jo toisen suunnan.