Vektorianalyysi

Harjoitus 1, syksy 2011

Tehtävät on jaettu kahteen osaan. Ensimmäiseisen osan tehtävät eli *lämmittelytehtävät*, on tarkoitettu itsenäisesti ratkaistaviksi, ja tehtävän lopussa on myös kerrottu oikea vastaus. Näitä ei ole tarkoitus käsitellä laskuharjoituksissa. Jos ne tuntuvat itsestäänselviltä voit ne hyvällä omallatunnolla sivuuttaa. Tarkoitus on vain kehittää hieman perulaskujen mukanaan tuomaa rutiinia. Voit toki kysyä harjoituksissa, tai luennoilla, neuvoja mikälli et saa jotain tehtävää ratkaistua. Toisen osan tehtävät, eli *laskaritehtävät*, käsitellään harjoituksissa, ja ne otetaan huomioon kurssin suorituksessa.

Lämmittelytehtävät.

1. Olkoon $x = (-1, -1, 0)$ ja $y = (1, 0, -3)$. Laske pistetulo $\langle x, y\rangle$. **Ratk.**: -1.

2. Olkoon $x = (-1, -1, 0)$ ja $y = (1, -1, 1)$. Ovatko vektorit x ja y kohtisuorassa toisiaan vastaan. **Ratk.**: Ovat

3. Olkoon $x_n = (1/n^2, 1+1/n, ne^{-n})$. Määritä raja-arvo $\lim_{n\to\infty} x_n$. **Ratk.**: $(0, 1, 0)$.

4. Tarkastellaan seuraavia tason osajoukkoja:

   $A = \{(x, y);\, x \in \mathbb{R},\, y = 0\}$, $B = \{(x, y);\, x \in \mathbb{R},\, y > x\}$, $C = \{(x, y);\, x > 0,\, y \leq x\}$

   Ovatko nämä avoimia, suljettuja tai ei kumpiakaan? **Ratk.**: A on suljettu, B on avoin ja C ei ole avoin eikä suljettu.

Laskaritehtävät.

1. Milloin Cauchy–Schwarzin epäyhtälössä pätee yhtäsuuruus? Anna tarkka perustelu.

2. Osoita ns. *Cauchy–Schwarzin epäyhtälön vasen puoli*: kaikilla x, $y \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x + y\|.$$

3. Osoita, että $\mathbb{R}^n$:n euklidiselle normille $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ pätee *suunnikas-sääntö*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad x,\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Osaatko sanoa mistä tämä nimi tulee?

4. Olkoon $\|x\|$ yllä määritelty vektorin $x = (x_1, \ldots, x_n)$ euklidinen normi. Määritellään nyt

$$|x| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Osoita, että on olemassa vakiot C_1, $C_2 > 0$ siten että kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$C_1\|x\| \leq |x| \leq C_2\|x\|.$$

Sanomme tällöin että normit $\|x\|$ ja $|x|$ ovat ekvivalentit.

5. Kutsumme kuvausta $(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sisätuloksi*, jos sillä on seuraavat ominaisuudet:

   - $(x, y) = (y, x), \quad x,\, y \in \mathbb{R}^n$
   - $(x, y+z) = (x, y) + (x, z), \quad x,\, y,\, z \in \mathbb{R}^n$
   - $(ax, y) = a\,(x, y), \quad x,\, y \in \mathbb{R}^n,\, a \in \mathbb{R}$
   - $(x, x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $(x, x) = 0$ jos ja vain jos $x = 0$

Onko olemassa sisätuloa joka määräisi edellisen tehtävän normin, eli pätisi

$$|x| = (x, x)^{1/2}\,?$$

Vihje: Mieti suunnikassääntöä ja sen todistusta.

6. ([Martio, t.1.1.1]) Olkoon $x,\, y \in \mathbb{R}^n$ ja $\|x\| = \|y\| = 1$. Määritä vektorin $x - y$ suurin mahdollinen pituus.