Vektorianalyysi

Harjoitus 11, syksy 2011

Tehtävät on jaettu kahteen osaan. Ensimmäisen osan tehtävät, eli *lämmittelytehtävät*, on tarkoitettu itsenäisesti ratkaistaviksi, ja tehtävän lopussa on myös kerrottu oikea vastaus. Näitä ei ole tarkoitus käsitellä laskuharjoituksissa. Jos ne tuntuvat itsestäänselviltä, voit ne hyvällä omallatunnolla sivuuttaa. Tarkoitus on vain kehittää hieman perulaskujen mukanaan tuomaa rutiinia. Voit toki kysyä harjoituksissa, tai luennoilla, neuvoja mikäli et saa jotain tehtävää ratkaistua. Toisen osan tehtävät, eli *laskaritehtävät*, käsitellään harjoituksissa, ja ne otetaan huomioon kurssin suorituksessa.

Lämmittelytehtävät.

1. Laske funktion $F(x) = (x_1, x_2 - x_3^2, x_1 + \sin(x_2^2))$ divergenssi.

   Ratk. 2

2. Olkoon $u(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Millä vakioiden a, b ja c arvoilla u on harmoninen?

   Ratk. Kun $a + c = 0$.

Laskaritehtävät.

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu joukko ja $\partial\Omega$ sen reuna. Määrittelemme Ω:n tilavuuden asettamalla

$$\operatorname{vol}(\Omega) = \int_\Omega 1\, dx$$

ja sen reunan alan kaavalla

$$\operatorname{area}(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1\, dS(x)$$

mikäli vain integraalit ovat olemassa. Tarvitsemme näitä merkintöja tehtävissä 5 ja 6. Tässä siis $dx = dx_1 \cdots dx_n$.

1. Olkoon A sylinteri $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq r^2,\ 0 \leq z \leq h\}$. Laske integraali

$$\int_A z(x^2 + y^2)\, dxdydz.$$

2. Luen ensin Martion kirjasta esimerkki 5.2.2, jossa käsitellään napakoordinaatit $\mathbb{R}^3$:ssa. Laske tämän jälkeen integraali

$$\int_A \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz,$$

kun A on rengasalue $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ R_1^2 < x^2+y^2+z^2 < R_2^2\}$.

3. Olkoon γ tason käyrä jolla on esitys $\gamma(x) = (x, x^2)$, $|x| \leq 1$. Laske integraali

$$\int_\gamma \frac{y}{x}\, dS.$$

4. Olkoon $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$. Laske integraali

$$\int_A \partial_y f\, dxdy,$$

kun $f(x,y) = x^2y^2$.

5. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, jolle divergenssi–teoreema on voimassa. Osoita, että

$$\mathrm{vol}\,(\Omega) = \frac{1}{n}\int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{n}, x\rangle\, dS(x),$$

missä $\mathbf{n}$ on Ω:n yksikköulkonormaali.

6. Olkoon $B_n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ ||x|| < r\}$ ja $S_{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ ||x|| = r\}$. Tässä $r > 0$ ja $n \geq 2$. Osoita, että

$$\mathrm{vol}\,(B_n(r)) = \frac{r}{n}\mathrm{area}\,(S_{n-1}(r)).$$