Vektorianalyysi
Appendix: Divergenssi–teoreema ja Greenin kaavat

Käymme aluksi luentoja kerraten läpi pintamitan perusominaisuudet. Tämän jälkeen todistamme Integraalilaskennan perulalauseelle yleistyksen integroitaessa jotain osittaisderivaattaa yli rajoitetun, riittävän sileäreunaisen avoimen joukon. Välittöminä seurauksina saamme Divergenssi-teoreeman ja Greenin kaavat.

1. Pintamitta Tarkastellaan rajoitettua aluetta $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Oletamme että Ω on C^2*–alue*, eli on olemassa jossain Ω:n ympäristössä määritelty C^2–funktio g siten että seuraavat ehdot pätevät:

- $x \in \Omega \Leftrightarrow g(x) < 0$
- $x \in \partial\Omega \Leftrightarrow g(x) = 0$.
- Edelleen vaadimme että $g(x) = 0 \Rightarrow \nabla g(x) \neq 0$.

Voimme siis tiivistä ylläolevan sanomalla että alueen Ω reuna on säännöllinen pinta joka määräytyy C^2–funktion g tasa-arvopintana $g^{-1}(0)$, ja alueen Ω määrää ehto $g < 0$. Jos $x_0 \in \partial\Omega$ niin kuten olemme aikaisemmin jo havainneet voimme implisiittifunktiolauseen nojalla ja tarvittaessa koordinaatit uudelleen numeroimalla kirjoittaa jossain pisteen x_0 ympäristössä U nämä ehdot muotoon

1. $x \in \Omega \cap U \Leftrightarrow x_1 > \varphi(x')$
2. $x \in \partial\Omega \cap U \Leftrightarrow x_1 = \varphi(x')$,

missä $x' = (x_2, \ldots, x_d)$ ja $\varphi : V \to \mathbb{R}$ on pisteen x'_0 ympäristössä V määritelty C^2–funktio. Luennolla näimme että on luonnollista määritellä joukon $\partial\Omega$ ympäristössä jatkuvan funktion f integraali yli pinnanpalan $\partial\Omega \cap U$ kaavalla

$$\int_{\partial\Omega\cap U} f dS(x) = \int_V f(\varphi(x'), x')\,(1 + \|\nabla\varphi(x')\|^2)^{1/2}\,dx'.$$

Integraali yli koko reunan $\partial\Omega$ lasketaan tämän jälkeen summana yli äärellisen joukkoperheen $\partial\Omega \cap U_i$ missä jokaisessa U_i:ssä pätevät ehdot 1. ja 2. jollain funktiolla φ_i ja sopivalla koordinaattien numeroinnilla[1]. Edelleen näimme luennoilla että tämän integraalin arvo on riippumaton valitusta parametrisoinnista.

[1] Mieti miksi ylläolevassa tilanteessa on aina mahdollista olettaa että joukkoja U_i on vain äärellinen määrä.

2. Yksikköulkonormaali. Käytetään edellisen osion merkintöjä. Säännöllisen tasa-arvopinnan normaalihan oli gradientin suuntainen, joten yksikkönormaalit reunalle $\partial\Omega = \{g = 0\}$ ovat vektorit $\pm\nabla g/\|\nabla g\|$. Näistä ulospäin, eli funktion g kasvun suuntaan, osoittaa *yksikköulkonormaali* $\mathbf{n} = \nabla g/\|\nabla g\|$. Jos pisteen x_0 ympäristössä Ω:n määrää ehto $x_1 > \varphi(x')$, niin yksikköulkonormaali reunapisteessä $(\varphi(x'), x')$ on siis

$$\mathbf{n}(x') = (-1, \nabla\varphi(x'))\,(1 + \|\nabla\varphi(x')\|^2)^{-1/2}.$$

3. Integraalilaskennan peruslause. Olkoon $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Haluamme laskea integraalin

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k}\, dx.$$

Aloitamme tekemällä muutaman yksinkertaistavan lisäoletuksen funktiosta f. Olkoon U ja φ kuten ehdoissa 1. ja 2. Oletamme lisäksi että U on koordinaattiakselin suuntainen suorakaide[2]. Oletetaan vielä että funktio f häviää suorakaiteen reunojen ympäristössä. Otetaan käyttöön apufunktio $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jolle pätee

$$h(t) = \begin{cases} 0, t \leq 0, \\ 1, t > 1. \end{cases}$$

Välillä $(0, 1]$ vaadimme ainoastaan että arvot on valittu siten että $h \in C^1(\mathbb{R})$. Pienen miettimisen jälkeen huomataan että

$$\lim_{\varepsilon \to +0} h\left(\frac{x_1 - \varphi(x')}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} 0, x_1 \leq \varphi(x'), \\ 1, x_1 > \varphi(x'), \end{cases}$$

eli käyttäen joukon $\Omega \cap U$ karakteristista funktiota

$$\lim_{\varepsilon \to +0} h\left(\frac{x_1 - \varphi(x')}{\varepsilon}\right) = \chi_{\Omega\cap U}(x).$$

Voimme nyt kirjoittaa

$$\int_{\Omega\cap U} \frac{\partial f}{\partial x_k}\, dx = \int_U \frac{\partial f}{\partial x_k} \chi_{\Omega\cap U}\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_U \frac{\partial f}{\partial x_k} h\left(\frac{x_1 - \varphi(x')}{\varepsilon}\right) dx.$$

[2] Tämä on aina mahdollista saada aikaan valitsemalla tarvittaessa kohdan 1. joukon sisältä pienempi suorakaide ja rajoittamalla kaikki tarkastelut tähän suorakaiteeseen

Lausekkeella
$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_k} h\left(\frac{x_1-\varphi(x')}{\varepsilon}\right)\, dx$$
on se etu, että voimme osittainintegroida muuttujan x_k suhteen: jos $U = I_1 \times \cdots \times I_d$, missä $I_k = [a_k, b_k]$ on $\mathbb{R}$:n väli, niin saamme
$$\int_{I_k} \frac{\partial f}{\partial x_k} h\left(\frac{x_1-\varphi(x')}{\varepsilon}\right) dx_k = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{I_k} \frac{\partial\,(x_1-\varphi(x'))}{\partial x_k} h'\left(\frac{x_1-\varphi(x')}{\varepsilon}\right) f\, dx_k,$$
kunhan vain ε on niin pieni että lauseke $h((x_1-\varphi(x')/\varepsilon)$ häviää alarajalla $x_k = a_k$. Käyttäen yksikköulkonormaalia $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ voimme kirjoittaa
$$\frac{\partial\,(x_1-\varphi(x'))}{\partial x_k} = -n_k(x')\,(1+\|\nabla\varphi(x')\|)^{1/2}.$$
Sijoitetaan tämä yllä oikeanpuoleiseen integraaliin ja osittainintegroidaan muuttujan x_1–suhteen jolloin saamme
$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_k} h\left(\frac{x_1-\varphi(x')}{\varepsilon}\right) dx = -\int_U n_k\sqrt{1+\|\nabla\varphi\|}\,h\left(\frac{x_1-\varphi(x')}{\varepsilon}\right)\frac{\partial f}{\partial x_1} dx.$$
Kun annamme $\varepsilon \to +0$ niin yllä oikeanpuoleisella integraalilla on raja–arvo
$$-\int_{U'} n_k\sqrt{1+\|\nabla\varphi\|}\left(\int_{\varphi(x')}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1\right) dx' = \int_{U'} n_k\sqrt{1+\|\nabla\varphi\|}\, f(\varphi(x'), x')dx'$$
Olemme siis osoittaneet että mikäli $f = 0$ suorakaiteen U reunalla, niin
$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k}\, dx_k = \int_{\partial\Omega} n_k\, f\, dS. \tag{3.1}$$
Yleinen tilanne seuraa tästä käyttämällä sopivaa *ykkösen ositusta* - tämä on eräs matematiikan vakiomenetelmiä joka eri variaatioina putkahtaa esiin hyvinkin erilaisissa yhteyksissä. Tarkaa todistusta emme nyt tee mutta idea on seuraavaa: peitetään koko $\overline{\Omega}$ äärellisellä määrällä *avoimia* suorakaiteita U_i joilla on jompikumpi seuraavista ominaisuuksista: joko[3] $U_i \subset \Omega$, tai $\Omega \cap U_i \neq \emptyset$ jolloin oletamme että U_i toteuttaa kohtien 1. ja 2. oletukset sopivalla φ. On mahdollista osoittaa[4] että on olemassa funktiot $\mu_i \in C_0^1(U_i)$ siten että jokaisella $x \in \Omega$ jokin luvuista $\mu_i(x) \neq 0$. Tällöin kaikilla $x \in \Omega$ pätee[5] $\sum_i \mu_i(x) > 0$ ja siis funktioille
$$\phi_i(x) = \frac{\mu_i(x)}{\sum_i \mu_i(x)}$$

[3] Erityisesti siis tällöin $U_i \cap \partial\Omega = \emptyset$

[4] Tämä seuraa Topologia II:ssa todistettavasta *Urysohnin lemmasta* ja pienesta silotuksesta.

[5] Huomaa että summassa on vain äärellisen monta termiä.

pätee $\phi_i \in C_0^1(U_i)$ ja

$$\sum \phi_i(x) = 1, \quad \text{kaikilla}\, x \in \Omega.$$

Tästä tulee nimi *ykkösen ositus*. Voimme nyt soveltaa identiteettiä 3.1 funktiohin $\phi_i f$ ja saamme

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k} dx = \sum_i \int_\Omega \frac{\partial(\phi_i f)}{\partial x_k} dx = \sum_i \int_{\partial\Omega} n_k \phi_i f \, dS = \int_{\partial\Omega} n_k f \, dS.$$

4. Divergenssi–teoreema. Olkoon Ω kuten edellä ja $F = (f_1, \ldots, f_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *vektorikenttä.* Voimme soveltaa edellisen osion tulosta jokaiseen koordinaattifunktioon f_k erikseen ja summata yli indeksin k. Saamme tällöin

$$\int_\Omega \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_k} dx = \int_{\partial\Omega} n_k f_k \, dS.$$

Määritellään vektorikentän F *divergenssi* asettamalla

$$\nabla \cdot F = \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_k},$$

jolloin yllä oleva identiteetti saa muodon

$$\int_\Omega \nabla \cdot F \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{n}, F \rangle \, dS.$$

Tätä tulosta kutsutaan *Divergenssi–teoreemaksi.*

5. Harmoniset funktiot ja Gaussin kaava. Olkoon $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Sovelletaan Divergenssi–teoreemaa vektorikenttään $F = \nabla u$. Aluksi huomaamme että

$$\nabla \cdot F = \nabla \cdot \nabla u = \sum_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}.$$

Määrittelemme nyt *Laplace–operaattorin* Δ asettamalla

$$\Delta u = \sum_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}.$$

Divergnessi–teoreemasta saamme siten välittömästi *Gaussin kaavan*

$$\int_\Omega \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{n} \, , \nabla u \rangle \, dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS.$$

Funktio u on määritelmän mukaan *harmoninen* Ω*:ssa* mikäli $\Delta u(x) = 0$ kaikilla $x \in \Omega$. Erityisesti siis alueessa Ω harmonisille funktioille on voimassa ehto

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dS = 0.$$

6. Osittainintegrointi ja Greenin kaavat. Oletetaan $f,\, g \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Käyttämällä tulon derivointisääntöä, integroimalla puolittain yli Ω:n ja käyttämällä integraalilaskennan peruslausetta saamme osittainintegrointikaavan

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k} g\, dx = \int_{\partial\Omega} n_k f g dS - \int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_k}\, dx.$$

Olkoot nyt $u,\, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ja valitaan yllä $f = \partial u/\partial x_k$ sekä $g = v$. Saamme siis

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} v\, dx = \int_{\partial\Omega} n_k \frac{\partial u}{\partial x_k} v\, dS - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}\, dx,$$

josta summaamalla yli indeksin k seuraa *Greenin ensimmäinen kaava*:

$$\int_\Omega \Delta u\, v\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v\, dS - \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle\, dx.$$

Vaihtamalla tässä u ja v keskenään sekä vähentämällä näin saadut yhtälöt puolittain saamme *Greenin toisen kaavan*:

$$\int_\Omega \Delta u\, v - u\, \Delta v\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\, dS.$$