

Topologia III

Harjoitus 8 (10.11.2011)

- Osoita, että vektoritilinpulla on aina n.s. nollasektio (eli $s(b)$ on säikeen E_b nollavektori $\forall b$).
 - Jos $\bar{v} \neq \bar{0}$, mikä ei yleisesti ole mahdollista konstruoida " \bar{v} -vektiota"?

2. Olkoon $h: U \rightarrow M$ jollain moniston $M \subset \mathbb{R}^k$ koordinaattikuvaus, $U \subset \mathbb{R}^n$.
Osoita, että h on diffeomorfini.

3. Osoita, että neliömuoto $\mu: V \rightarrow \mathbb{R}$ määrittelee sisätulon kaavalla
$$v \cdot w = \frac{1}{2} (\mu(v+w) - \mu(v) - \mu(w)).$$

4. (Kts. Seuraus 3.15, s. 47)

a) Osoita: jos $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ on lineaarisesti riippumaton jono avaruuden \mathbb{R}^{n+k} vektoreita ($k \geq 0$) ja $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{n+k}$ on vektorivaruuden \mathbb{R}^{n+k} kanta, niin vektoreista $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{n+k}$ voidaan valita k kpl s.e. nämä yhdessä vektorien $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ kanssa muod. \mathbb{R}^{n+k} :n kannan.

b) Palauta Lin. alg. kurssilta mieleen (anna viite luentomonisteen sopiviin kohtiin tms.): olk. A ($n \times n$)-matriisi.

A on kääntyvä

$\Leftrightarrow A$:n sarakkeet ovat lin. riippumattomia

$\Leftrightarrow A$:n sarakevektorit muod. \mathbb{R}^n :n kannan

$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

5. Tarkastellaan taas palloa $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

a) Osoita, että $\bar{x} \perp T_{\bar{x}} S^n \quad \forall \bar{x} \in S^n$.

b) Osoita, että normaali-kiinnitys $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ on triviaali kiinnitys.

6. Osoita, että pallolla S^{2n-1} on ei-missään-häviävä vektorikenttä, $n \in \{1, 2, \dots\}$.

Vihjeitä: - S^{2n-1} on avaruuden $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$ yksikköpallo

- kts. Esim. 3.10 a)

- Pidetään tunnettuna: $T_{\bar{x}} S^n = \{ \bar{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \bar{v} \perp \bar{x} \}$