

Topologia III

Harj. 7 (3.11.2011)

1. Todista Lemma 2.16.

2. (Luennot, s. 38)

Osoita, että differentiaalimääritelmiä

$$Tf_x(v) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0)$$

on riippumaton polun γ valinnasta.

3. (Luennot, s. 38)

Osoita kaava

$$Tf_x \left(\sum c_i \frac{\partial h}{\partial u_i}(0) \right) = \sum c_i \frac{\partial (f \circ h)}{\partial u_i}(0).$$

4. Kaikkien $(n \times n)$ -matriisien joukolle $M(n, \mathbb{R})$ määritellään topologia bijektio $M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})$$

avulla.

Kääntyvien $(n \times n)$ -matriisien joukolle $GL(n, \mathbb{R})$ annetaan relatiivitopologia.

Osoita, että $GL(n, \mathbb{R})$ on sileä monisto.

(Vihje: matriisi A on kääntyvä $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.)

5. Topologinen ryhmä on ryhmä G , joka on myös topologinen T_1 -avaruus s.e. laskutoimitus

$$\begin{aligned} \mu: G \times G &\rightarrow G \\ (g, g') &\mapsto gg' \end{aligned}$$

ja kuvaus

$$\begin{aligned} \tau: G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

ovat jatkuvia.

Osoita, että $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ on topologinen ryhmä.

6. (Luennot, s. 41; Esim. 3.3d)

a) Osoita, että kuvaus $h: U \times \mathbb{R} \rightarrow \pi^{-1}U$ on homeomorfini ja lineaarinen säikeillä.

b) Miksi kaava $([x], t) \mapsto ([x], tx)$ ei määrittele funktiota $U \times \mathbb{R} \rightarrow \pi^{-1}U$, jos U olisi koko $\mathbb{R}P^n$?