Topologia III
Harjoitus 10 (24.11.2011)

1. Olk. $\xi = \eta = \varepsilon^1_{\mathbb{R}}$, $g(t,x) = (t, tx)$,
eli säikeellä F_t g on lineaarikuvaus $x \mapsto tx$.
Ovatko $(\mathrm{Im}(g), \pi_2|_{\mathrm{Im}(g)}, \mathbb{R})$ ja
$(\ker(g), \pi_1|_{\ker(g)}, \mathbb{R})$
vektorikimppuja? $(\ker(g) = \{(t,x) \mid g(t,x) = (t,0)\})$

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{g} & E(\eta) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{id} & \mathbb{R} \end{array}$$

2. (Luennot, s. 55)
Osoita, että q_0 on tekijäkuvaus.

3. (Luennot, s. 55)
Osoita, että $V^0_n(\mathbb{R}^{n+k})$ on kompakti.

4. a) Osoita, että jokainen $\mathbb{R}^{n+1}$:n origon kautta kulkeva suora leikkaa pallon S^n täsmälleen kahdessa pisteessä.
(Huom. origon kautta kulkeva suora on 1-ulotteinen vektorialiavaruus)
b) Osoita, että funktio $\varphi : \mathbb{R}P^n \to G_1(\mathbb{R}^{n+1})$
$[x] \mapsto$ origon ja pisteen x kautta kulkeva suora
on homeomorfismi.

5. Lauseen 4.6. todistuksessa määriteltiin karttakuvaukseksi
$$g| : U \times \mathbb{R}^n \to g(U \times \mathbb{R}^n)$$
$$(b, x) \mapsto (b, g_b(x)).$$
Osoita yksityiskohtaisesti tämän funktion käänteisfunktion jatkuvuus.

6. Tarkastellaan väitteitä
(a) On olemassa jatkuva $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ s.e. $f(x) \perp x$ $\forall x \in S^{n-1}$
(siis ei-missään-häviävä vektorikenttä)
(b) On olemassa $g : S^{n-1} \to S^{n-1}$ s.e. g:llä ei ole kiintopisteitä ja $g(x) \neq -x$ $\forall x \in S^{n-1}$.

Osoita, että (a) $\Leftrightarrow$ (b).
(Tarvittaessa vihjeitä luennolla ...)