Todennäköisyyslaskenta, 2. kurssikoe 19.12.2011

**Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin, MAOL taulukot sekä itse laadittu, A4-kokoinen lunttilappu.**

**1.** Satunnaismuuttujien $X$ ja $Y$ yhteistiheysfunktio on

$$f(x, y) = c(1 + x\,y), \qquad \text{kun } 0 < x < 1 \text{ ja } 0 < y < 1$$

ja nolla muualla.

a) Ratkaise vakion $c$ arvo. (2 pistettä)

b) Laske ehdollinen odotusarvo $E(Y \mid X = x)$ (kun $0 < x < 1$). (4 pistettä)

**2.** Tarkastellaan hierarkkista mallia

$$\begin{aligned} X \mid Y &\sim N(0, Y^2) \\ Y &\sim \mathrm{U}(0, 1). \end{aligned}$$

Tässä $N(\mu, \sigma^2)$ on normaalijakauma odotusarvolla $\mu$ ja varianssilla $\sigma^2$, ja $\mathrm{U}(a, b)$ on välin $(a, b)$ tasajakauma.

a) Anna konkreettinen kaava satunnaismuuttujien $X$ ja $Y$ yhteistiheysfunktiolle. Anna kaava $X$:n (reuna)tiheysfunktiolle määrättynä integraalina. (Varoitus: integraalia ei kannata yrittää sieventää.)

b) Laske $EX$ ja $\operatorname{var} X$.

**3.** Olkoot $X$ ja $Y$ riippumattomia välin $(0, 1)$ tasajakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia. Määritellään $U$ ja $V$ kaavoilla

$$U = XY, \qquad V = X.$$

a) Johda satunnaismuuttujien $U$ ja $V$ yhteistiheysfunktio, ja ilmoita selkeästi, missä joukossa johtamasi kaava on pätevä. (4 pistettä)

b) Johda muuttujan $U$ (reuna)tiheysfunktio. (2 pistettä)

**4.** Määritellään satunnaisvektori $\mathbf{Y}$ kaavalla

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{C}\mathbf{U} + \mathbf{V},$$

jossa $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ on vakiomatriisi, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ on vakiovektori, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times k}$ on vakiomatriisi, ja $\mathbf{U}$ ja $\mathbf{V}$ ovat satunnaisvektoreita. Satunnaisvektorit $\mathbf{U}$ ja $\mathbf{V}$ ovat riippumattomia, ja niiden jakaumat ovat $\mathbf{U} \sim N_k(\mathbf{0}, \mathbf{D})$ ja $\mathbf{V} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$. Tässä $\mathbf{D}$ on symmetrinen ja positiivisesti definiitti $k \times k$-vakiomatriisi, vakio $\sigma^2 > 0$ ja $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on yksikkömatriisi (eli lävistäjämatriisi, jonka lävistäjän alkiot ovat ykkösiä).

Laske satunnaisvektorin $\mathbf{Y}$ odotusarvovektori ja kovarianssimatriisi (4 pistettä). Perustele, miksi satunnaisvektorilla $\mathbf{Y}$ on moniulotteinen normaalijakauma (2 pistettä).