Todennäköisyyslaskennan kurssi, 10. harjoitus (7.–9.12.2011)

1. Olkoon X sm, $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ sv ja olkoon sv $\mathbf{Z} = (X, Y_1, Y_2)$. Sv:n $\mathbf{Z}$ odotusarvovektori ja kovarianssimatriisi ovat

$$E\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{Cov}(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Laske: a) $\mathrm{var}(X)$, b) $\mathrm{Cov}(\mathbf{Y})$, c) $\mathrm{cov}(X, \mathbf{Y})$, d) satunnaisvektorin (Y_2, X) kovarianssimatriisi eli $\mathrm{Cov}((Y_2, X))$, e) $\mathrm{var}(Y_2 - X + 3)$.

2. Olkoot $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ n-ulotteisia satunnaisvektoreita, joille

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{\Sigma}_X, \quad \mathrm{Cov}(\mathbf{Y}) = \mathbf{\Sigma}_Y, \quad \mathrm{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{\Sigma}_{XY}$$

Johda niiden summan kovarianssimatriisille seuraava kaava sekä a-kohdan että b-kohdan menetelmällä,

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbf{\Sigma}_X + \mathbf{\Sigma}_Y + \mathbf{\Sigma}_{XY} + \mathbf{\Sigma}_{XY}^T$$

a) Käytä kaavaa $\mathrm{Cov}(\mathbf{V}) = \mathrm{cov}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ sekä operaattorin $\mathrm{cov}(\cdot, \cdot)$ ominaisuuksia.

b) Tarkastele osavektoreista $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ muodostettua yhdistettyä vektoria $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, jossa on ensin sv:n $\mathbf{X}$ komponentit ja sitten sv:n $\mathbf{Y}$ komponentit. Kirjoita $\mathrm{Cov}(\mathbf{Z})$ annettujen matriisien avulla, esitä summa $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ muodossa $\mathbf{AZ}$ valitsemalla matriisi $\mathbf{A}$ sopivasti, sekä sovella kaavaa $\mathrm{Cov}(\mathbf{AZ}) = \mathbf{A}\,\mathrm{Cov}(\mathbf{Z})\mathbf{A}^T$.

3. (Choleskyn hajotelma.) Olkoon $\mathbf{\Sigma}$ kaksiulotteisen satunnaisvektorin $\mathbf{Z} = (X, Y)$ kovarianssimatriisi. Esitä se muodossa $\mathbf{AA}^T$, jossa $\mathbf{A}$ on 2×2-alakolmiomatriisi, ts. etsi esitys

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho\,\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\,\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \mathbf{AA}^T, \quad \text{jossa} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

(Opastus: Kirjoittamalla matriisitulon auki saat kolme riippumatonta yhtälöä. Yhtälöitä on yksi kutakin kovarianssimatriisin alkiota kohti, mutta matriisin $\mathbf{\Sigma}$ sekä matriisin $\mathbf{AA}^T$ symmetrisyys eliminoi yhtälöistä yhden. Ratkaise yhtälöt järjestyksessä (1, 1), (1, 2), (2, 2).)

4. Tietystä populaatiosta satunnaisesti valitun miehen ikä A (vuosia), pituus L (cm) ja paino W (kg) mallinnetaan kolmiulotteisella normaalijakaumalla siten, että sv:lle $\mathbf{V} = (A, L, W)$

$$E\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 40 \\ 173 \\ 75 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{Cov}\,\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 256 & 0 & 58 \\ 0 & 103 & 74 \\ 58 & 74 & 82 \end{bmatrix}$$

Moniulotteisen normaalijakauman ehdolliset jakaumat selviävät jakson 9.7 lauseesta 9.5.

a) Mikä on miesten painon (reuna-)jakauma?

b) Johda ehdollinen jakauma $W \mid (A = a)$. Mikä on 20 vuotta vanhojen miesten painon jakauma?

c) Johda ehdollinen jakauma $W \mid (A = a, L = l)$. Mikä on 20 vuotta vanhojen ja 180 cm pitkien miesten painon jakauma?

5. Olkoon $\mathbf{X} \sim N_n(\mu, \mathbf{\Sigma})$, jossa $\mathbf{\Sigma}$ on positiivisesti definiitti matriisi. Tällöin satunnaismuuttujalla $Y = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$ on eräs tuttu jakauma. Mikä?

Opastus: käytä hajotelmaa $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{AA}^T$, jossa $\mathbf{A}$ on $n \times n$-matriisi.