Todennäköisyyslaskennan kurssi, 8. harjoitus (22.–25.11.2011)

1. Olkoot X ja Y riippumattomia standardinormaalijakaumaa $N(0,1)$ noudattavia satunnaismuuttujia. Osoita, että satunnaismuuttujalla $U = X/Y$ on Cauchyn jakauma. Opastus: sovella muuttujanvaihtokaavaa käyttämällä täydennystä $V = Y$. Tätä valintaa vastaa diffeomorfismi

$$\begin{cases} u = x/y \\ v = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = uv \\ y = v \end{cases}$$

avoimien joukkojen $\{(x,y) : y \neq 0\}$ ja $\{(u,v) : v \neq 0\}$ välillä.

2. Olkoot X ja Y riippumattomia gammajakautuneita satunnaismuuttujia siten, että

$$X \sim \mathrm{Gam}(\alpha, 1), \qquad Y \sim \mathrm{Gam}(\beta, 1),$$

jossa $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$ ovat vakioita. Määritellään satunnaismuuttujat U ja V kaavoilla

$$U = \frac{X}{X+Y}, \qquad V = X + Y.$$

Johda lauseke yhteistiheysfunktiolle $f_{U,V}$, ja ilmoita johtamasi lausekkeen pätevyysalue. Johda sen jälkeen satunnaismuuttujan U (reuna)tiheysfunktio. (Vihje: U:lla on eräs luvusta 4 tuttu jakauma.)

3. Olkoot X ja Y riippumattomia Poissonin jakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia siten, että $EX = \lambda > 0$ ja $EY = \mu > 0$. Olkoon $U = X + Y$. Johda satunnaismuuttujan X ehdollinen jakauma ehdolla $U = u$ (jossa $u \geq 0$ on kokonaisluku). Kysytty jakauma on ennestään tuttu; tunnista se.

Opastus: U:n jakauman saat selville jaksosta 4.1.5. Laskeaksesi ehdollisen todennäköisyyden $P(X = x \mid U = u)$ tarvitset todennäköisyyden $P(X = x, X + Y = u)$, jonka saat laskettua suoraan tehtävänannon perusteella.

4. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, joista kumpikin noudattaa eksponenttijakaumaa $\mathrm{Exp}(\lambda)$, jossa $\lambda > 0$ on vakio. Määritellään satunnaismuuttujat U ja V kaavoilla

$$U = X + Y, \qquad V = X - Y.$$

(Huomaa, että tämä on erikoistapaus esimerkistä 6.8.)

a) Johda satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio.

b) Johda satunnaismuuttujien U ja V reunatiheysfunktiot. (U:n jakauma on tuttu luvusta 4; V:llä on ns. Laplacen jakauma eli kaksitahoinen eksponenttijakauma).

c) Johda V:n ehdollinen jakauma ehdolla $U = u$ (mikä tuttu jakauma?) sekä U:n ehdollinen jakauma ehdolla $V = v$, kun $u, v > 0$.

5. Olkoon X:n reunajakauma $\mathrm{Gam}(\alpha, \lambda)$, jossa $\alpha, \lambda > 0$ ovat vakioita. Olkoon Y ehdollinen jakauma ehdolla $X = x$ Poissonin jakauma odotusarvolla x (kun $x > 0$).

a) Kirjoita lauseke yhteistiheydelle $f_{X,Y}(x,y)$ ja ilmaise selvästi, millä arvoilla (x,y) lausekkeesi on voimassa.

b) Tunnista X:n ehdollinen jakauma ehdolla $Y = y$ (jossa $y \geq 0$ on kokonaisluku) tarkastelemalla yhteistiheyttä $f_{X,Y}(x,y)$ muuttujan x funktiona. (Ehdollinen jakauma on tietty gammajakauma, mutta millä parametreilla?)

c) Johda Y reunajakauman tiheysfunktio (vihje: integroi kuten tilastotieteilijä), ja tarkista b-kohdan tulos jakolaskun $f_{X,Y}(x,y)/f_Y(y)$ avulla.