Todennäköisyyslaskennan kurssi, 7. harjoitus (15.–18.11.2011)

1. Satunnaismuuttujilla X ja Y on jatkuva yhteisjakauma tiheysfunktiolla

$$f(x,y) = c\,xy, \qquad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 2,$$

(ja $f(x,y)$ häviää muuten). Laske c sekä reunatiheysfunktiot f_X ja f_Y. Ovatko X ja Y riippumattomia?

2. Satunnaismuuttujilla X ja Y on jatkuva yhteisjakauma tiheysfunktiolla

$$f(x,y) = c\,xy, \qquad 0 < x < y < 2,$$

(ja $f(x,y)$ häviää muuten). Laske c sekä reunatiheysfunktiot f_X ja f_Y. Ovatko X ja Y riippumattomia?

3. Laske tehtävän 2 tilanteessa satunnaisvektorin (X,Y) odotusarvovektori ja kovarianssimatriisi.

4. Todista, että (ks. kaava (6.7)),

$$E(\mathbf{AZB} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}(E\mathbf{Z})\mathbf{B} + \mathbf{C},$$

jossa $\mathbf{Z}$ on satunnaismatriisi ja $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ ovat vakiomatriiseja, joiden dimensiot ovat sellaiset, että lauseke $\mathbf{AZB} + \mathbf{C}$ on määritelty.

Opastus: Näytä, että kaikilla (i,j)

$$[E(\mathbf{AZB} + \mathbf{C})]_{ij} = [\mathbf{A}(E\mathbf{Z})\mathbf{B} + \mathbf{C}]_{ij}\,,$$

jossa alaindekseillä ij merkitään matriisiarvoisen lausekkeen kohdassa (i,j) olevaa alkiota. (Sovella matriisikertolaskun määritelmää, odotusarvon lineaarisuutta sekä satunnaismatriisin odotusarvon määritelmää.)

5. Olkoot satunnaisvektorin $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ komponentit X_1 ja X_2 riippumattomia satunnaismuuttujia, joille $EX_1 = 1$, $EX_2 = 2$, $\operatorname{var} X_1 = 1$ ja $EX_2^2 = 6$. Määritellään satunnaisvektori $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ siten, että

$$Y_1 = 2011 - 10X_1 + 5X_2, \qquad Y_2 = 3 + X_1 + 2X_2.$$

Laske kovarianssimatriisi $\operatorname{Cov}(\mathbf{X})$ ja sen jälkeen $\operatorname{Cov}(\mathbf{Y})$ kaavan (6.9) avulla.

Mikä yhteys tällä laskulla on 5. harjoitusten tehtävään 3?