

## Todennäköisyyslaskennan kurssi, 6. harjoitus (8.–11.11.2011)

1. Olkoon  $X > 0$  sellainen satunnaismuuttuja, että odotusarvot  $EX$ ,  $E(1/X)$  ja  $E \ln(X)$  ovat kaikki reaalityyppisiä. Mitä voit sanoa Jensenin epäyhtälön avulla

- lukujen  $1/EX$  ja  $E(1/X)$  suuruusjärjestyksetä, ja
  - lukujen  $\ln(EX)$  ja  $E \ln(X)$  suuruusjärjestyksestä?
  - Laske edellä kerrotut neljä suuretta (tai niiden likiarvot), kun  $X$ :llä on välin  $(1, 2)$  tasajakautus, ja tarkista tällä tavalla, että sait edellä epäyhtäsuuruusmerkit järjestyksessä oikein päin.
2. Olkoot  $0 < r < s$  ja  $E|X|^s < \infty$ . Todista Hölderin epäyhtälön avulla Ljapunovin epäyhtälö

$$(E|X|^r)^{1/r} \leq (E|X|^s)^{1/s}$$

3. Kahden diskreetin satunnaismuuttujan  $X$  ja  $Y$  yhteinen tiheysfunktio on

$$f(x, y) = c(2x + y), \quad \text{kun } 0 \leq x \leq 2 \text{ ja } 0 \leq y \leq 3.$$

kokonaislukupareille  $(x, y)$  (ja  $f(x, y) = 0$  muuten).

- Laske vakion  $c$  arvo.
  - Laske  $P(X = 2, Y = 1)$ .
  - Laske  $P(X \geq 1, Y \leq 2)$ .
4. Laske edellisen tehtävän tilanteessa satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  reunajakaumien pistetodennäköisyysfunktioita. Tutki, löytyykö sellaista pistettä  $(x, y)$ , jossa tulo  $f_X(x)f_Y(y)$  on erisuuri kuin  $f(x, y)$ . Ovatko  $X$  ja  $Y$  riippumattomia?
5. Punaista ja vihreää noppaa heitetään 12 kertaa.
- Laske todennäköisyys sille, että näissä 12 heitossa saadaan täsmälleen kaksi kertaa sama silmäluku punaisella ja vihreällä nopalla.
  - Laske todennäköisyys sille, että näissä 12 heitossa saadaan täsmälleen kaksi kertaa sama silmäluku punaisella ja vihreällä nopalla ja että heitossa täsmälleen 4 kertaa vihreällä nopalla on suurempi silmäluku kuin punaisella.