Todennäköisyyslaskennan kurssi, 5. harjoitus (11.–14.10.2011)

1. (Luvut $g(EX)$ ja $Eg(X)$ ovat tavallisesti erisuuria.) Laske $g(EX)$ ja $Eg(X)$, kun X noudattaa tasajakaumaa $\mathrm{U}(0,1)$, ja

a) $g(x) = x^2$,

b) $g(x) = \sqrt{x}$.

2. Olkoot X ja Y sellaisia satunnaismuuttujia, joille

$$EX = 1, \quad EY = 2, \quad EX^2 = 3, \quad EY^2 = 5, \quad E(XY) = -1.$$

Laske satunnaismuuttujan $Z = 2X - 3Y$ odotusarvo ja varianssi.

3. Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia satunnaismuuttujia, joille $EX_1 = 1$, $EX_2 = 2$, $\operatorname{var} X_1 = 1$ ja $EX_2^2 = 6$. Määritellään satunnaismuuttujat Y ja Z kaavoilla

$$Y = 2011 - 10X_1 + 5X_2, \qquad Z = 3 + X_1 + 2X_2.$$

Laske $\operatorname{var}(Y)$, $\operatorname{var}(Z)$ ja $\operatorname{cov}(Y,Z)$.

4. Laske satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio $M(t)$ (ks. jakso 3.7) seuraavissa tapauksissa. Määritä kussakin tapauksessa myös momenttiemäfunktion määrittelyjoukko (eli ne t-arvot, joilla $M(t)$ on äärellinen luku). Päättele johtamistasi tuloksista kyseisen jakauman odotusarvo ja varianssi.

a) $X \sim \mathrm{Poi}(\mu)$, jossa $\mu > 0$. (Poissonin jakauma $\mathrm{Poi}(\mu)$ on diskreetti jakauma, jonka ptnf on $f(x) = \mathrm{e}^{-\mu}\,\mu^k/k!$, kun $x = 0, 1, 2, \ldots$ Käytä eksponenttifunktion sarjakehitelmää.)

b) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, jossa $\lambda > 0$.

5. Toista edellinen tehtävä vielä tilanteessa $X = Z^2$, jossa $Z \sim N(0,1)$. Opastus: normaalijakauman $N(\mu, \sigma^2)$ tiheysfunktiolla on tunnetusti lauseke

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}\right), \qquad y \in \mathbb{R},$$

jossa parametrit $\mu \in \mathbb{R}$ ja $\sigma > 0$. Tiheysfunktio integroituu aina ykköseksi, ja tätä tietoa kannattaa käyttää hyväkseen.