Todennäköisyyslaskennan kurssi, 4. harjoitus (4.–7.10.2011)

1. (Kvantiili-kvantiili–kuvion [engl. q–q plot] idea.) Olkoon satunnaismuuttujalla X sellainen jakauma, että sen kvantiilifunktio q_X saadaan sen kertymäfunktion F_X käänteisfunktiona (eli jakson 2.8 alussa mainitut oletukset ovat voimassa). Olkoon $s > 0$ ja $c \in \mathbb{R}$, ja määritellään

$$Y = sX + c$$

a) Miten $F_Y(y)$ saadaan ilmaistua X:n kf:n F_X avulla?

b) Miten sm:n Y kvantiilifunktio $q_Y(u)$ saadaan ilmaistua q_X:n avulla? Huomaa, että pisteet $(q_X(u), q_Y(u))$ sattuvat tietylle suoralle, kun $0 < u < 1$. Mikä on kyseisen suoran kulmakerroin ja mikä on sen ja y-akselin leikkauspiste?

2. Ratkaise a-, b- ja c-kohdissa tiheysfunktiot käyttämällä muuttujanvaihtotekniikkaa (kaava (2.6) tai muistisääntö (2.7)). Kiinnitä huomiota johtamiesi kaavojen pätevyysalueisiin.

a) Satunnaismuuttujalla $S > 0$ on tiheys f_S, ja $T = \ln S$. Ilmaise $f_T(t)$ tiheyden f_S avulla.

b) $U \sim \mathrm{Exp}(1)$, ja $V = U/(1+U)$. Laske f_V.

c) Satunnaismuuttujalla $Y = \ln X$ on tasajakauma $U(a, b)$ (jossa $a < b$). Laske f_X.

3. (Testin p-arvon jakauma.) Tarkastellaan sellaista tilastollista hypoteesintestaustilannetta, jossa suuret testisuureen Z arvot antavat näyttöä nollahypoteesia H_0 vastaan. Tällaisen testin p-arvo määritellään kaavalla

$$p\text{-arvo} = P(Z_0 \geq z_{\mathrm{obs}}) = 1 - F_0(z_{\mathrm{obs}}),$$

jossa z_{obs} on testisuureen saama arvo käsillä olevassa aineistossa, F_0 on testisuureen kertymäfunktio nollahypoteesin mukaisessa populaatiossa, ja Z_0 on sm, jolla on kf F_0. Oletamme, että Z_0:lla on jatkuva jakauma tiheysfunktiolla f_0 (ja että $f_0 > 0$ on jatkuva funktio).

Nyt tarkastelemme p-arvoa vastaavan satunnaismuuttujan U jakaumaa, jossa

$$U = 1 - F_0(Z),$$

ja Z tarkoittaa satunnaismuuttujaa, jolla on (yksinkertaisen) vaihtoehtohypoteesin mukainen jatkuva jakauma kf:lla F_1 ja tf:lla f_1.

Laske U:n kf ja tf. Mitä tuttua jakaumaa U noudattaa, jos valitaan $F_1 = F_0$?

4. (Vedonlyöntisuhde.) Sinä arvelet, että tietty tapahtuma A sattuu, ja ystäväsi tahtoo löydä asiasta vetoa kanssasi. Ystäväsi pistää vetoon summan s ja sinä summan $k \cdot s$. Jos A sattuu, sinä voitat koko potin $(1 + k)s$ ja ystäväsi ei saa mitään. Jos A ei satu, niin ystäväsi voittaa koko potin ja sinä et saa mitään. Todennäköisyys $0 < p = P(A) < 1$ on tunnettu.

Miten k pitää valita, jotta veto olisi reilu? (Veto on reilu, jos kumpikaan pelaaja ei [odotusarvon mielessä] keskimäärin voita eikä häviä vedossa.)

Huom. Ratkaisuna saatavaa lukua k sanotaan vedonlyöntisuhteeksi (tapahtuman A puolesta), engl. *odds (in favour of A)*, ja se on tapana ilmaista kahden kokonaisluvun suhteena, esim 50 : 50 (*fifty-fifty*) tai vaikka 50 : 60 (*fifty-sixty*).

5. Olkoon $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Laske odotusarvo EX^2 laskemalla summa

$$EX^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2 f(x)$$

samantapaisella tekniikalla, kuin mitä käytetään esimerkissä 3.3. Tarkista, että

$$EX^2 - (EX)^2 = n\,p\,(1-p).$$