Todennäköisyyslaskennan kurssi, 3. harjoitus (27.–30.9.2011)

1. Tutkimme mahdollisuutta määritellä diskreetti sm, jonka mahdolliset arvot ovat ei-negatiiviset kokonaisluvut 0, 1, 2, ..., ja jonka ptnf on muotoa

$$f(x) = c(\theta)\,\frac{\theta^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

jossa $c(\theta) > 0$ on tietty parametrin θ arvosta riippuva luku.

a) Millä parametrin θ arvoilla ptnf on ei-negatiivinen? Etsi kaikki tällaiset θ:n arvot. (Käytämme tulkintaa $0^0 = 1$.)

b) Mikä arvo $c(\theta)$:lla täytyy olla?

c) Mikä tuttu jakauma (jakaumaperhe) tässä on kyseessä?

Vihje: analyysistä tiedetään, että $e^u = \sum_{k \geq 0} u^k/k!$, ja tämä eksponenttifunktion esitys potenssisarjana on voimassa kaikilla $u \in \mathbb{R}$.

2. Tarkastellaan jatkuvasti jakautunutta sm X, jonka tf on $f(x) = c \cdot h(x)$, jossa normalisoimaton tiheysfunktio h on

$$h(x) = x^{-p}, \quad \text{kun } x > 1,$$

ja muualla h häviää. Tässä $p > 1$. (Tämä jakauma kuuluu Pareton jakaumaperheeseen.)

Laske jakauman kf F. Ratkaise x yhtälöstä $F(x) = u$, kun $0 < u < 1$ on annettu luku.

3. Määritellään funktio f seuraavasti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{kun } -2 < x < -1, \\ \frac{1}{10}\,\frac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{kun } -1 < x < \frac{9}{4} \text{ ja } x \neq 0, \\ \frac{3}{10}\,\exp(-x + \frac{9}{4}) & \text{kun } x > \frac{9}{4}, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

a) Tarkista, että f on tiheysfunktio, ja hahmottele sen kuvaaja.

b) Olkoon satunnaismuuttujalla X tiheysfunktiona f. Laske $P(-\dfrac{3}{2} < X < 1)$.

4. Sm:n X jakauma on stokastisesti suurempi tai yhtä suuri kuin sm:n Y jakauma (merkintä $X \overset{\mathrm{d}}{\geq} Y$), mikäli X:n arvoilla on taipumus olla suurempia kuin Y:n arvoilla siinä mielessä, että

$$P(X > t) \geq P(Y > t), \qquad \text{kaikilla } t. \tag{1}$$

Tämä on osittaisjärjestys: usein kahta jakaumaa ei voida järjestää tässä mielessä.

a) Mitä ominaisuus (1) tarkoittaa kertymäfunktioille F_X ja F_Y?

b) Valitse seuraavista jakaumapareista suurempi (järjestyksen $\overset{\mathrm{d}}{\geq}$ mielessä) tai totea, että niitä ei voida asettaa suuruusjärjestykseen: (i) tasajakaumat $\mathrm{U}(0,1)$ ja $\mathrm{U}(0,2)$; (ii) eksponenttijakaumat $\mathrm{Exp}(1)$ ja $\mathrm{Exp}(2)$; (iii) tasajakaumat $\mathrm{U}(0,3)$ ja $\mathrm{U}(1,2)$.

5. Olkoon aidosti positiivisella satunnaismuuttujalla X eksponenttijakauma $\mathrm{Exp}(1)$. Määritellään satunnaismuuttuja Y siten, että $Y = 1/X$ (ts. $Y(\omega) = 1/X(\omega)$ kaikilla $\omega \in \Omega$). Laske sm:n Y kf F_Y. Laske sm:n Y tf f_Y derivoimalla sen kf.