Todennäköisyyslaskennan kurssi, 1. harjoitus (14.–16.9.2011)

1. Tässä tehtävässä A ja B ovat mielivaltaisia tapahtumia, jotka eivät välttämättä ole erillisiä. Todista a-, b-kohdan kaavat käyttämällä tn-mitan (äärellistä) additiivisuutta, kaava (1.2). Kyseessä olevien tapahtumien erillisyyden voit tarkistaa joko Vennin diagrammien avulla tai muulla tavalla. Tarkista lopuksi, että ns. yhteenlaskukaava (kohta c) on voimassa.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$,

b) $P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A)$.

c) $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$.

2. Olkoon $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.25$ ja $P(A \cap B) = 0.1$. Laske seuraavien tapahtumien todennäköisyydet,
a) A^c b) $A \cup B$ c) $A^c \cup B^c$ d) $A \setminus B$

3. Aapo ja Bella osallistuvat arvontaan, jossa voittoarpa vedetään umpimähkään sadan arvan joukosta, joille on annettu numerot 1–100. Aapo voittaa, jos vedetyn arvan numero on 1, 2 tai 3. Bella voittaa, jos vedetyn arvan numero on 3, 4, 5, 6 tai 7. (Aapo ja Bella ostivat arvan numero 3 puoliksi.) Olkoon A se tapahtuma, että Aapo voittaa, ja B se tapahtuma, että Bella voittaa. Valitaan perusjoukoksi $\Omega = \{1, 2, ..., 100\}$ siten, että alkeistapaus $\omega \in \Omega$ tarkoittaa sitä, että vedetyn arvan numero on ω.

a) Laske kaavan (1.3) nojalla $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ ja $P(A \cap B)$. Ovatko A ja B erillisiä tapahtumia? Entä ovatko ne riippumattomia tapahtumia?

b) Laske $P(A \mid B)$ ja $P(B \mid A)$.

c) Nyt saamme tietää, että Bella voitti. Millä todennäköisyydellä myös Aapo voitti?

4. Eräs opiskelija K vastaa monivalintatehtävään. Mikäli K tietää oikean vastauksen, hän valitsee sen. Muussa tapauksessa K arvaa yhden tarjolla olevista neljästä vaihtoehdoista umpimähkään. K tietää oikean vastauksen todennäköisyydellä 0.8.

K vastaa ko. monivalintatehtävään oikein. Millä todennäköisyydellä hän todella tietää oikean vastauksen? (Selvennys: tässä tietenkin kysytään *ehdollista* todennäköisyyttä.)

5. Olkoon C sellainen tapahtuma, jolle $P(C) > 0$. Mielivaltaisen tapahtuman A ehdollinen todennäköisyys ehdolla C määritellään tutulla tavalla

$$P(A \mid C) = P(A \cap C)/P(C).$$

Todista, että ehdollinen tn $P(\cdot \mid C)$ toteuttaa määritelmässä 1.2 annetut todennäköisyyden aksioomat (1) ja (2). Todista lisäksi, että ehdollinen tn $P(\cdot \mid C)$ on (äärellisesti) additiivinen, eli että $P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C)$ aina, kun A ja B ovat erillisiä tapahtumia. (Myös täysadditiivisuus on voimassa ehdolliselle todennäköisyydelle. Jos intoa ja aikaa riittää, voit pohtia miksi näin on.)