Tilastollisen päättelyn jatkokurssi, sl 2011, HT 5, viikko 41

1. Päättele HT:ien 3.4 ja 4.2 avulla monisteen s. 13 määritellyn autoregressiivisen aikasarjamallin parametrin ϕ SU–estimaattorin $\hat{\phi}$ lauseke ja perustele miksei $\hat{\phi}$ ole harhaton eli $\mathsf{E}_\theta(\hat{\phi}) \neq \phi$ (tarkkaa matemaattista todistusta ei vaadita).

Huom.: Tehtävä osoittaa, että monisteen s. 21-22 tarkastellussa lineaarisessa mallissa tavanomaiset lineaarisen mallin SU–estimoinnin (ja siten myös tehtävän 4 F-testin) eksaktit tulokset eivät päde, jos selittävien muuttujien vektorissa Z_i on mukana selitettävän muuttujan edeltäviä arvoja.

2. Osoita, että HT:n 4.1 pistemääräfunktio on martingaali informaatiojoukon $\mathbf{Y}_n = (Y_1, ..., Y_n)$ suhteen.

Vihje: Ks. Esimerkki 1.1 ja HT 3.1.

3. Tarkastellaan monisteen yhtälössä (2.16) (ks. s. 21) esitettyä lineaarista mallia ja sen parametreille yhtälöissä (2.18) esitettyjä SU–estimaattoreita $\hat{\beta}$ ja $\hat{\sigma}^2$ (ks. s. 22). Oletetaan, että mallin selittävät muuttujat Z_i ja virheet ε_i toteuttavat monisteen s. 27 mainitut ehdot $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i Z_i' \xrightarrow{p} Q$ (Q ei–satunnainen ja positiivisesti definiitti) ja $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\varepsilon_i \xrightarrow{p} 0$. Monisteen s. 27-28 on todettu, että näiden ehtojen voimassa ollessa estimaattori $\hat{\beta}$ on tarkentuva. Osoita, että myös estimaattori $\hat{\sigma}^2$ on tarkentuva eli $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$.

Vihje: Estimaattorin $\hat{\sigma}^2$ lausekkeessa voit kirjoittaa $Y_i - Z_i'\hat{\beta} = (Y_i - Z_i'\beta) - Z_i'(\hat{\beta} - \beta)$. Korottamalla puolittain neliöön, summaamalla yli indeksien $i = 1, ..., n$ ja jakamalla summa n:llä saadaan estimaattorille $\hat{\sigma}^2$ kehitelmä, jonka avulla tarkentuvuus voidaan todeta oletuksia, SLL:ia ja Lausetta 1.1 käyttäen.

4. Tarkastellaan samaa lineaarista mallia kuin edellisessä tehtävässä ja oletetaan, että $\hat{\sigma}^2$:n tarkentuvuuden lisäksi monisteen s. 30-31 esitetty β:n SU–estimaattorin $\hat{\beta}$ asymptoottinen normaalisuus pätee eli

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} \mathsf{N}\left(0, \sigma^2 Q^{-1}\right).$$

Asetetaan parametrille β lineaarinen hypoteesi $\mathsf{H}_0 : A\beta = c$, jossa matriisi A $(q \times p)$ ja vektori c $(q \times 1)$ ovat tunnettuja ja A:n aste on q. Vaihtoehtoinen hypoteesi on $A\beta \neq c$. Seuraavassa oletetaan, että H_0 on voimassa.

(i) Osoita, että $\sqrt{n}(A\hat{\beta} - c) \xrightarrow{d} \mathsf{N}\left(0, \sigma^2 AQ^{-1}A'\right)$.

(ii) Lineaarisen mallin kurssilla esitetty F–testisuure voidaan kirjoittaa

$$F = n(A\hat{\beta} - c)' \left[A\left(n^{-1}\sum_{i=1}^n Z_i Z_i'\right)^{-1} A'\right]^{-1} (A\hat{\beta} - c)/qS^2,$$

(jatkuu seuraavalla sivulla)

jossa $S^2 = n\hat{\sigma}^2 / (n-p)$. Osoita, että $qF \xrightarrow{d} \chi^2_q$.

Vihje: Kohdassa (i) Lause 1.3 ja multinormaalijakauman ominaisuudet (vrt. HT:n 3.5 vihje). Kohdassa (ii) kohta (i), monisteen oletus (2.26), estimaattorin S^2 tarkentuvuus σ^2:n estimaattorina ja Seuraus 1.2 (vrt. myös HT 1.5 ja sen vihje).