Riskiteorian laskuharjoitus 13, 19.12.2011

Huom. Harjoitus on poikkeuksellisesti maanantaina klo 16-18 salissa B120.

1. Yhtiön alkupääoma hetkellä nolla on $U_0 > 0$. Vuoden n kokonaisvahinkomäärä X_n noudattaa yhdistettyä Poisson-jakaumaa. Reaalikasvu nostaa vahinkojen lukumäärän odotusarvoa $100g$ prosenttia ja inflaatio vahinkojen suuruuksia $100i$ prosenttia vuodessa, missä g ja i ovat ei-negatiivisia vakioita. Muilta osin jono $X_0, X_1, X_2, \ldots$ on stationaarinen. Vuonna nolla vahinkojen lukumäärän odotusarvo on λ ja vahingon suuruuden kaksi alinta origomomenttia ovat a_1 ja a_2. Eri vuosien kokonaisvahinkomäärät ovat toisistaan riippumattomia. Vuoden n vakuutusmaksu on

$$P_n = (1+v)\mathbb{E}(X_n),$$

missä $v > 0$ on varmuuslisä. Olkoon c positiivinen vakio ja

$$R_N = \mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{N} X_n > U_0 + \sum_{n=1}^{N} P_n\right), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Osoita, että R_N suppenee kohti nollaa N:n kasvaessa kohti ääretöntä, kun $(g,i) = (c,0)$.

2. (jatkoa) Olkoon $(g,i) = (0,c)$. Osoita, että R_N ei suppene kohti nollaa N:n kasvaessa kohti ääretöntä.

3. (jatkoa) Olkoon N kiinteä. Määrää kumuloituneen kokonaisvahinkomäärän $X_1 + \cdots + X_N$ odotusarvo ja varianssi.

4. (jatkoa) Vertaile reaalikasvun ja inflaation vaikutusta riskiin arvioimalla todennäköisyyttä R_N normaaliapproksimaation avulla. Riittää vertailla tapauksia

$$(g,i) = (c,0) \quad \text{ja} \quad (g,i) = (0,c).$$

5. Olkoot potentiaalisen vakuutetun utiliteettifunktio u ja vakuutusyhtiön utiliteettifunktio U muotoa

$$u(v) = \mu^{-1}(1 - e^{-\mu v}), \quad U(v) = a + bv, \quad v \in \mathbb{R},$$

missä μ, a ja b ovat positiivisia vakioita. Olkoon vakuutetun kokonaisvahinkomäärä X Poisson-jakautunut parametrilla $\lambda > 0$. Osoita, että osapuolten nollahyötyiset vakuutusmaksut eivät riipu alkuvarallisuudesta. Todista, että voidaan määrätä sellainen vakuutusmaksu, että X:n vakuuttaminen on 'hyödyllistä' molemmille osapuolille.