Riskiteorian laskuharjoitus 10, 30.11.2011

Huom. Tiistaina 29.11 ei ole luentoa.
Torstaina 1.12. klo 14-16 on ylimääräinen luento, sali DK118.

1. Vahinkoja sattuu Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ ja yksittäisen vahingon suuruus on vakio (=1). Vahinkojen raportoitumisviiveet ovat toisistaan ja lukumääräprosessista riippumattomia ja keskenään samoin jakautuneita. Olkoon yhteinen kertymäfunktio G. Korvaus maksetaan aina kokonaisuudessaan heti, kun vahinko raportoituu yhtiöön. Yhtiö aloittaa toimintansa vuoden 1 alussa.

Olkoon M_n vuoden n aikana maksettavien korvausten kokonaismäärä, $n = 1, 2, \ldots$. Määrää $\mu_n = \mathbb{E}(M_n)$. Osoita, että $\mu_n \leq \lambda$ ja että $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \lambda$.

2. (jatkoa) Olkoon raportoitumisviiveen odotusarvo ρ ja U_n korvausvastuu vuoden n lopussa. Osoita, että korvausvastuun taso pitkällä tähtäimellä on $\lambda\rho$ ts. että $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(U_n) = \lambda\rho$.

3. (jatkoa) Yhtiö määrää korvausvastuuennusteen vuoden 1 lopussa tyyppiä $aV + b$ olevalla kaavalla, missä a ja b ovat vakioita ja V vuoden 1 lopussa tunnettuina olevien vahinkojen lukumäärä. Olkoon $U = U_1$ korvausvastuu vuoden 1 lopussa. Määrää kertoimet a ja b parametrin λ ja kertymäfunktion G avulla siten, että keskineliöpoikkeama $\mathbb{E}((U - aV - b)^2)$ minimoituu.

4. (jatkoa) Oletetaan lisäksi, että raportoitumisviiveet ovat eksponentiaalisesti jakautuneita parametrilla μ. Yhtiön vuotuinen vakuutusmaksu on P. Yhtiöllä on vuoden 1 alussa alkupääomaa määrä U_0.

Tarkastellaan yhtiön tilaa vuoden 1 lopussa. Oletetaan, että vuoden 1 aikana yhtiölle on raportoitu N vahinkoa. Yhtiön katsotaan olevan vararikossa, elleivät sen varat riitä jo sattuneiden vahinkojen korvaamiseen todennäköisyydellä $\geq 1 - \varepsilon$. Osoita, että yhtiö ei ole vararikossa, kun $\lambda = 100$, $\mu = 1$, $P = 120$, $U_0 = 30$, $N = 50$ ja $\varepsilon = 10^{-3}$.

5. Vahinkoja sattuu Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetifunktiolla $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$, missä

$$\lambda(t) = \lambda + \varepsilon \sin(2\pi t)$$

ja $0 < \varepsilon < \lambda$ ovat vakioita. Vahinkojen raportoitumisviiveet ovat toisistaan ja lukumääräprosessista riippumattomia välille $(0, 1)$ tasan jakautuneita satunnaismuuttujia. Yksittäisen vahingon suuruus on vakio (=1) ja korvaus maksetaan aina kokonaisuudessaan heti, kun vahinko raportoituu yhtiöön. Yhtiö on aloittanut toimintansa hetkellä nolla. Määrää korvausvastuun odotusarvo hetkinä $n/2$, $n = 1, 2, \ldots$.