Riskiteorian laskuharjoitus 6, 2.11.2011

1. (jatkoa edellisen kerran tehtäviin 4 ja 5) Olkoon vahinkojen lukumäärän odotusarvo $\lambda = 100$ ja vahingon suuruudet eksponenttijakautueita parametrilla $\mu = 1$. Määrää a) tarkasti, b) normaaliapproksimaation avulla sellainen x, että $\mathbb{P}(X > x) = 0.01$.

2. (jatkoa) Määrää edellisen tehtävän kynnys x Wilson-Hilferty -approksimaation avulla.

3. Oletetaan, että vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X noudattaa yhdistettyä Poisson-jakaumaa. Olkoon Poisson-parametri λ ja vahinkojen suuruudet eksponenttijakautuneita parametrina μ. Yhtiöllä on vuoden alussa alkupääoma U_0 ja vuotuinen vakuutusmaksu on P. Tarkastellaan seuraavassa X:n jakaumaa NP-approksimaation tarkkuudella. Olkoon $\mu = 1, \lambda = 100$ ja $\varepsilon = 0.01$.

a) Olkoon $P = 110$. Miten suuri on alkupääoman oltava, että vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä olisi tason ε alapuolella.

b) Olkoon $U_0 = 30$. Miten suuri on vakuutusmaksun P oltava, että vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä olisi tason ε alapuolella.

4. Olkoon yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X (riittävällä tarkkuudella) normaalisesti $N(\mu, \sigma^2\mu)$-jakautunut, missä odotusarvo μ ja varianssi $\sigma^2\mu$ ovat positiivisia. Olkoon $P = (1 + v)\mu$ vuotuinen vakuutusmaksu. Määrää alkupääomavaatimus yhtiölle μ:n funktiona, kun ehtona on, että vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä on oltava tason ε alapuolella. Muilla parametreilla on arvot $\sigma = 10, v = 0.1$ ja $\varepsilon = 0.01$. Miten suuri μ:n on vähintään oltava, että alkupääomaa ei tarvita ollenkaan.

5. (jatkoa) Oletetaan, että yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X on ehdolla $Q = q_i$ normaalisesti $N(\mu q_i, \sigma^2\mu q_i)$-jakautunut (odotusarvo μq_i, varianssi $\sigma^2\mu q_i$), missä μ ja σ^2 ovat positiivisia vakioita ($i = 1, 2$). Toisin sanoen

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(Q = q_1)\ \phi_1(x) + \mathbb{P}(Q = q_2)\ \phi_2(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

missä ϕ_i on $N(\mu q_i, \sigma^2\mu q_i)$-jakauman kertymäfunktio, $i = 1, 2$. Olkoon vuotuinen vakuutusmaksu $P = (1+v)\mu$ ja vararikkotodennäköisyyttä koskeva ehto kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että μ:stä ja σ:sta riippumatta alkupääomaa tarvitaan, kun muilla parametreilla on arvot $v = 0.1$ ja $\varepsilon = 0.01$ ja Q:n jakauma on $\mathbb{P}(Q = 0.8) = \mathbb{P}(Q = 1.2) = 0.5$.