Riskiteorian laskuharjoitus 5, 19.10.2011

1. Osoita, että Eulerin gammafunktiolle pätee

$$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$$

alueessa $r > 1$. Todista tämän avulla, että Polya-muuttujan K pistetodennäköisyydet $p_k = \mathbb{P}(K = k)$ toteuttavat rekursiokaavan

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}, \ \ k = 1, 2, \ldots$$

missä a ja b ovat sopivia vakioita.

2. Olkoon K lukumäärämuuttuja ja $p_k = \mathbb{P}(K = k)$, $k = 0, 1, \ldots$. Oletetaan, että

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}, \ \ k = 1, 2, \ldots,$$

missä $a > 0$ ja $b \neq 0$. Olkoon M_K K:n momentit generoiva funktio. Osoita, että

$$M_K'(s) = ae^s M_K'(s) + ae^s M_K(s) + be^s M_K(s)$$

alueessa $s < 0$ ja määrää M_K. (Vastaus: $M_K(s) = \left(\frac{1-a}{1-ae^s}\right)^{(a+b)/a}$, kun $s < 0$.)

3. (jatkoa) Osoita, että K on Polya-jakautunut, jos lisäksi $a < 1$ ja $a + b > 0$.

4. Olkoon kokonaisvahinkomäärä X yhdistetty muuttuja. Oletetaan, että vahinkojen lukumäärä K on geometrisesti jakautunut parametrilla $p \in (0, 1)$,

$$\mathbb{P}(K = k) = p(1-p)^k, k = 0, 1, \ldots.$$

Vahingon suuruudella on eksponenttijakauma parametrina μ (tiheysfunktio $\mu e^{-\mu z}$ alueessa $z > 0$). Osoita, että

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0, \text{ jos } x < 0 \\ 1 - (1-p)e^{-p\mu x}, \text{ jos } x \geq 0. \end{cases}$$

5. (jatkoa) Osoita, että geometrinen jakauma on painotettu Poisson-jakauma, kun struktuurimuuttujalla on eksponenttijakauma. Olkoon $a > 0$. Vertaile lauseen 6.2.1.2 antamaa todennäköisyyden $\mathbb{P}(X > (1+a)\mathbb{E}(X))$ approksimaatiota tarkkaan arvoon.