Riskiteorian laskuharjoitus 4, 12.10.2011

1. Oletetaan, että vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X noudattaa yhdistettyä Poisson-jakaumaa. Olkoon Poisson-parametri $\lambda > 0$ ja yksittäisen vahingon suuruudella gamma $-$ (r, α)-jakauma $(r > 0, \alpha > 0)$. Määrää kokonaisvahinkomäärän odotusarvo, varianssi ja vinous. (Vastaukset: $\lambda r/\alpha, \lambda r(r+1)/\alpha^2, (r+2)/\sqrt{\lambda r(r+1)}$.)

2. Olkoon X_i yhdistettyä painotettua Poisson-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja parametrilla (λ_i, Q_i, S), $i = 1, 2$. Oletetaan, että X_1 ja X_2 ovat riippumattomia. Osoita, että $X_1 + X_2$ noudattaa yhdistettyä painotettua Poisson-jakaumaa.

3. Olkoon vahingon suuruden kertymäfunktio S,

$$S(z) = e^{-z^{-\alpha}}, \quad z \geq 0,$$

missä α on positiivinen vakio. Osoita, että $\bar{S}$ on säännöllisesti vaihteleva. Mikä on jakauman hännän vahvuutta kuvaava lemman 5.1 potenssi β_S.

4. Olkoon X yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja ja edustakoon Z yksittäisen vahingon suuruutta. Oletetaan, että Z on rajoitettu siten, että

$$\mathbb{P}(Z \in [0, M]) = 1,$$

missä $M > 0$ on vakio. Olkoon $\mu = \mathbb{E}(X)$ ja $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$. Mitataan muuttujan X vaarallisuutta suhteellisella hajonnalla $s = \sigma/\mu$. Osoita, että

$$(*) \qquad s \leq \sqrt{M/\mu}.$$

5. (jatkoa) Olkoon $m \in (0, M]$ kiinteä. Konstruoi sellainen välille $[0, M]$ keskittyvä yksittäisen vahingon suuruusjakauma, että $(*)$ toteutuu yhtälönä ja $\mathbb{E}(Z) = m$.