Osittaisdifferentiaaliyhtälöt II
Laskuharjoitus 6

Olkoon L elliptinen operaattori

$$L\phi = -\sum_{j,k=1}^{n} \partial_j a^{jk} \partial_k \phi + \sum_{j=1}^{n} b^j \partial_j \phi + c\phi,$$

missä $a^{jk}, b^j, c \in L^\infty(\Omega)$. Tarkastelemme seuraavassa eri määritelmien järkevyyttä.

Määritelmä 1 *Funktio $u \in H_0^1(\Omega)$ on reuna-arvo ongelman*

$$\begin{cases} Lu = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

heikko ratkaisu, jos kaikilla $\phi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^{n} a^{jk} (\partial_k u)(\partial_j \phi) + \sum_{j=1}^{n} b^j (\partial_j u)\phi + cu\phi \right) dx = \langle f, \phi \rangle_{H^{-1} \times H_0^1}.$$

Määritelmä 2 *Jos $u \in L^2(\Omega)$, niin sanomme, että $w \in L^2(\Omega)$ on u:n heikko derivaatta, ja merkitsemme $D_j u = w$, jos kaikilla $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ pätee*

$$\int_\Omega u D_j \phi dx = -\int_\Omega w\phi dx.$$

Määritelmä 3 *Jos $u \in L^2(\Omega)$, niin $T = D_j u \in H^{-1}(\Omega)$ on kuvaus*

$$T : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$$
$$\langle T, \phi \rangle = -\int_\Omega u D_j \phi dx.$$

1. Todista Lemma 2.7 todistuksen tapaan, että jos $T : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ on kuvaus

$$\langle T, u \rangle = \int_\Omega f_0 u dx - \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega f_j D_j u dx, \tag{2}$$

missä $f_j \in L^2(\Omega)$, niin T on jatkuva, ja

$$\|T\|^2_{H^{-1}(\Omega)} = \inf\{\sum_{j=0}^{n} \|f_j\|^2_{L^2(\Omega)} \,|\, T \text{ toteuttaa (2):n funktioilla } f_j \in L^2(\Omega)\}$$

2. Olkoon $0 < s_1 < s_2$. Osoita, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $C = C_{\varepsilon,s_1,s_2}$ s.e.

$$\|u\|_{H^{s_1}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \|u\|_{H^{s_2}(\mathbb{R}^n)} + C\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{3}$$

3. Oletetaan, että (3) pätee avaruuksille $H^s(\partial\Omega)$. Todista luentomuistiinpanojen lause 2.11. (s.80)

4. Olkoon $u \in C^2([0,1])$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$. Millä α:n arvoilla on olemassa $C_\alpha > 0$, jolla

$$\inf_{v \in PL_n} \|u - v\|_{H^1_0(0,1)} \leq C_\alpha \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha \|u\|_{C^2([0,1])}, \tag{4}$$

kun

$$PL_n = \{v \in C(0,1) \mid v|_{I_{nj}} = a_j x + b_j \ \forall\ j,\ v(0) = 0,\ v(1) = 0\}, \tag{5}$$

missä

$$I_{nj} = \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right], \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{6}$$