Osittaisdifferentiaaliyhtälöt II
Laskuharjoitus 3

1. Osoita, että jos $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi|_{B(0,1)} = 1$, niin kaikilla $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ pätee
$$\lim_{\epsilon \to 0} \psi(\epsilon x)u(x) = u(x) \quad H^k(\mathbb{R}^n)\text{:ssa.}$$

2. Osoita, että tarpeeksi suurella dimensiolla n pätee
$$\frac{1}{|x|} \in H^1(B(0,1)),$$
missä $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$.

3. Olkoon $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$ Lipschitz funktio. Voiko funktion f laajentaa Lipschitz-funktioksi $F : R^2 \to \mathbb{R}$?

4. Sanomme, että funktio $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ on periodinen H^1-funktio välillä $[-\pi,\pi]$ jos funktio f voidaan laajentaa funktioksi $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jolle $F(x + 2\pi) = F(x)$ ja $F \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$. Tutki minkälaisia ominaisuuksia funktion f Fourier-kertoimilla on.