Osittaisdifferentiaaliyhtälöt II
Laskuharjoitus 8

1. Olkoon Ω rajoitettu C^1-alue ja $L : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}$ elliptinen ja symmetrinen 2. kertaluvun osittaisdifferentiaalioperaattori. Merkitään λ_j ovat L:n ominaisarvot. Osoita, että
$$\liminf_{j\to\infty} \lambda_j \neq -\infty.$$

2. Oletetaan edellisen tehtävän tilanteessa, että $(L-\omega)u = f \in H^{-1}$, $(L-\lambda)\phi = 0$ ja $\omega \neq \lambda$. Osoita, että
$$(u,\phi)_{L^2} = \frac{1}{\lambda-\omega}\langle f,\phi\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}.$$

3. Olkoon $L = -c^2\Delta$, $c > 0$ vakio, Ω rajoitettu C^∞-alue,
$$(L-\lambda_j)\phi_j = 0, \quad \phi_j \in H_0^1(\Omega),$$
ja $(\phi_j,\phi_k)_{L^2} = \delta_{jk}$. Kun $f \in L^2(\Omega)$, merkitään $f_j = (f,\phi_j)_{L^2}$. Oletetaan $u \in C^\infty(\overline{\Omega}\times\overline{\mathbb{R}}_+)$ ja
$$\begin{cases} (\partial_t^2 - c^2\Delta)u(x,t) = 0, & \Omega\times\mathbb{R}_+\text{:ssa} \\ u|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}_+} = h \\ u|_{t=0} = f^1, \quad \partial_t u|_{t=0} = f^2 \end{cases}$$
Oletetaan lisäksi, että $h = 0$. Kirjoita $u(x,t)$ muodossa
$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t)\phi_j(x),$$
missä funktiot u_j riippuvat kertoimista f_j^1 ja f_j^2.

4. Oletetaan edellisen tehtävän tilanteessa, että $f^1 = 0 = f^2$, mutta $h \neq 0$. Kirjoita $u(x,t)$ muodossa
$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t)\phi_j(x),$$
missä funktiot u_j riippuvat funktiosta h.