Osittaisdifferentiaaliyhtälöt II
Laskuharjoitus 1

Kaikissa tehtävissä $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin.

1. Olkoon $u \in H^{|\alpha|+|\beta|}(\Omega)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Todista, että $D^\alpha D^\beta u = D^{\alpha+\beta} u$.

2. Olkoon Ω rajoitettu, $K \in C^1(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ ja $u \in L^1(\Omega)$. Todista Lebesguen dominoidun konvergenssikaavan ja väliarvolauseen avulla
$$\frac{\partial}{\partial x^j} \int_\Omega k(x,y)u(y)dy = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x^j} k(x,y)u(y)dy.$$

3. Osoita, että funktio $f : x \mapsto |x|^{2/3}$ kuuluu avaruuteen $H^1(-1,1)$ ja että
$$f'(x) = c\ \mathrm{sgn}(x)|x|^{-1/3}$$
jollain vakiolla c. Edellä $\mathrm{sgn}(x) = -1$ kun $x < 0$ ja $\mathrm{sgn}(x) = +1$ muuten.

4. Määritellään
$$\Omega_j := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > 1/j\},$$
ja $V_j := \Omega_{j+5} \setminus \overline{\Omega}_j$, $j \geq 1$. Osoita, että on olemassa sileä ykkösen ositus $(\eta_j)_{j\geq 1}$ s.e.
$$0 \leq \eta_j \leq 1, \quad \eta_j \in C_0^\infty(V_j), \quad \sum_{j=1}^\infty \eta_j = 1.$$
Vihje. Valitse
$$\eta_j = \psi_j / \sum_j \psi_j, \quad \psi_j = \phi_{\epsilon_j} * \chi_{U_j},$$
missä $U_j := \Omega_{j+4} \setminus \overline{\Omega}_{j+1}$ ja funktiot ϕ_{ϵ_j} on valittu sopivasti.