Osittaisdifferentiaaliyhtälöt II
Laskuharjoitus 2

1. Olkoon $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$. Määritellään

$$\widetilde{u}(x) := \begin{cases} u(x), & x \in \overline{\mathbb{R}}^n_+ \\ au(x', -x_n) + bu(x', -kx_n), & x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_-. \end{cases}$$

   Millä ehdoilla a, b, k:lle, $k > 0$, pätee $\widetilde{u} \in C^1(\mathbb{R}^n)$?

2. Olkoon X, Y Banach avaruuksia ja $Z \subset X$ tiheä. Osoita, että jos $T : Z \to Y$ on lineaarinen kuvaus, jolle jollakin $C > 0$, pätee

$$\|Tx\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad x \in Z,$$

   niin on olemassa yksikäsitteinen lineaarikuvaus $\widetilde{T} : X \to Y$ jolle $\widetilde{T}|_Z = T$ ja

$$\left\|\widetilde{T}x\right\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad x \in X.$$

3. Osoita, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

   on $C^\infty(\mathbb{R})$:ssa.

4. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $W \subset U$ avoin joukko, jonka sulkeuma on U:n kompakti osajoukko. Osoita, että on olemassa funktio $f \in C_0^\infty(U)$ jolle $f|_W = 1$.