

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt II
Laskuharjoitus 5

1. (Palautetaan kirjallisena.) Käy läpi Lax-Milgramin lauseen todistus kompleksisessä tapauksessa.

Olkoon H kompleksinen Hilbert-avaruus, $B : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ seskvilineaarinen neliömuoto ($B[\lambda u, \mu w] = \lambda \bar{\mu} B[u, w]$), jolle on $\alpha, \beta > 0$ s.e.

$$\begin{aligned} |B[u, w]| &\leq \alpha \|u\| \|w\|, \quad u, w \in H, \\ |B[u, u]| &\geq \beta \|u\|^2, \quad u \in H. \end{aligned}$$

Tällöin kaikilla funktionaaleilla $F : H \rightarrow \mathbb{C}$ on yksikäsitteinen $u \in H$ s.e.

$$B[u, w] = \overline{F(w)}, \quad w \in H.$$

2. Milloin operaattori

$$L := \sum_{j,k=1}^n a^{jk} \partial_j \partial_k + \sum_{j=1}^n b^j \partial_j + c$$

toteuttaa

$$(Lu, w)_{L^2(\Omega)} = (u, Lw)_{L^2(\Omega)}, \quad u, w \in C_c^\infty(\Omega).$$

3. Osoita, että avaruuden $H^1(\mathbb{R}^n)$ duaaliavaruudessa $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ normi on

$$\|u\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{-2} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi, \quad u \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

4. Osoita, että $\delta \in H^{-1}(\Omega)$, missä $\Omega = (-1, 1)$ ja $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$.