MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Ensimmäinen välikoe 21.10.2011

Kaikissa tehtävissä (X, d) ja (Y, d') ovat metrisiä avaruuksia.

1. Miten määritellään avoimet ja suljetut joukot? Käyttämällä vain esittämiäsi määritelmiä osoita, että jokainen äärellinen osajoukko $A \subset X$ on suljettu. Osoita, että jos X on äärellinen, niin sen kaikki osajoukot ovat avoimia.
2. Näytä, että kartion pinta $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ on suljettu Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukko ja että sen sisus $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z^2\}$ on avoin joukko.
3. Olkoon $f, g \colon X \to Y$ jatkuvia ja $A \subset X$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in A$ pätee $f(x) = g(x)$. Osoita, että jos $x \in \bar{A}$, niin $f(x) = g(x)$.
4. Olkoon $X = \{f \colon [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva}\}$ kaikkien jatkuvien funktioiden joukko yksikköväliltä reaaliluvuille varustettuna sup-metriikalla, eli

   $$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}.$$

   Olkoon $F \colon X \to \mathbb{R}$ funktio

   $$F(f) = f(0) + f(\tfrac{1}{2}) + f(1).$$

   Näytä että F on jatkuva.