MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Ensimmäinen välikoe 19.10.2011

Kaikissa tehtävissä (X, d) on metrinen avaruus.

1. Miten määritellään avoin joukko? Osoita käyttämällä vain esittämääsi määritelmää, että jos joukot A_i ovat avoimia jokaisella $i \in I$, niin $\bigcup_{i \in I} A_i$ on avoin ja jos I on äärellinen, niin myös $\bigcap_{i \in I} A_i$ on avoin.

2. Olkoon $A \subset X$ epätyhjä. Osoita, että $\bar{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$.

3. Näytä, että ellipsoidin pinta $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1\}$ on suljettu Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukko ja että sen sisus $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 3y^2 + z^2 < 1\}$ on avoin joukko.

4. Olkoon $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $Y = \mathbb{R}$ molemmissa Euklidinen metriikka. Olkoon $f \colon X \to Y$ funktio
$$f(x) = \frac{1}{x}$$
Onko tämä funktio (a) jatkuva? (b) Lipschitz? (Todista.)