MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Harjoitus 8
Käydään läpi pe 11.11.2011

Joihinkin tehtäviin löytyy vihjeitä sivun alareunasta. Jokaista tehtävää on mietittävä vähintään 10 minuttia (kellosta!) ennen kuin katsoo vinkkiä.

1. (9:3) Osoita, että $X \approx Y$, eli "olla homeomorfinen" on ekvivalenssirelaatio kaikkien metristen avaruuksien luokassa.
2. (9:2) Onko kirjan kannessa oleva kuva Jordanin käyrä kun se ajatellaan äärettömän ohueksi? Tarkkaa todistusta ei tarvita.
3. Osoita, että $\mathbb{R}$ on homeomorfinen (a) avoimen välin $]0,1[$ kanssa (b) joukon $(-\infty, 0) \subset \mathbb{R}$ kanssa. Päättele tästä, että kaikki avoimet välit (sekä rajoitetut että rajoittamattomat) ovat homeomorfisia $\mathbb{R}$:n kanssa.
4. Olkoon $A = \{(x,y) \mid x^2 + 5y^2 < 1\}$. Määritä $\text{int}A$, $\text{ext}A$ ja ∂A (ja todistukset).
5. Valitse kahdesta seuraavasta kumman teet (kummasta vain saa pisteen, jos tekee molemmat, ei saa enempää pisteitä):
   (a) (7:1) Olkoon $A \subset X$ suljettu. Osoita, että jos $E \subset A$ on suljettu A:ssa, niin se on suljettu X:ssä
   (b) (7:3 melkein, ei b-kohtaa) Merkitään B^2 tason avointa yksikkökuulaa, $B^2 = B((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ Tutki seuraavista joukoista $A \subset B((0,0),1) \subset \mathbb{R}^2$, mitkä niistä ovat suljettuja B^2:ssa
      (a) $A = \{(x,0) \mid -1 < x < 1\}$
      (c) $A = \{(x,0) \mid x + y > 1\}$
6. Oletetaan, että $X \approx Y$. Osoita, että X on kompakti jos ja vain jos Y on kompakti.

Vihjeet:

Tehtävä 4: Käytä samoja menetelmiä kuin viime jaksossa käytettiin joukon A avoimuuden osoittamiseksi ja lausetta 8.3. Tehtävä 6: Jos (x_n) on suppeneva jono X:ssä ja $f\colon X \to Y$ on jatkuva, niin (y_n) on suppeneva jono Y:ssä missä $y_n = f(x_n)$.