MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Harjoitus 8
Käydään läpi pe 11.11.2011

Joihinkin tehtäviin löytyy vihjeitä sivun alareunasta. Jokaista tehtävää on mietittävä vähintään 10 minuttia (kellosta!) ennen kuin katsoo vinkkiä.

Olkoon l_∞ kaikkien rajoitettujen reaalilukujonojen joukko, eli

$$l_\infty = \{(x_n) \mid \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}.$$

Olkoon $d((x_n),(y_n)) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}$.

1. Osoita, että yllä määritelty d on metriikka l_∞:ssä.
2. (Melkein kuten 11:8) Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ olkoon $e_n \in l_\infty$ sellainen jono $(e_{n1}, e_{n2}, \dots)$ jolle pätee $e_{ni} = 1$ kun $i = n$ ja $e_{ni} = 0$ muuten. Osoita, että jonolla (e_n) ei ole kasautumisarvoja.
3. (11:9) Olkoon (x_n) jono avaruudessa X. Osoita, että jonon (x_n) kasautumisarvojen joukko on suljettu.
4. (Melkein 11:12) Oletamme että kuvausten $f_n \colon X \to Y$ jono suppenee pisteittäin kohti kuvausta f ja että jokainen f_n on 5-Lipschitz. Osoita, että myös f on 5-Lipschitz.

   (11:14) Määritellään funktio $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seuraavasti: $f(x,y) = 1$, kun $x^4 < y < x^2$ ja $f(x,y) = 0$ muuten. Todista:

   5. $\lim_{z \to \bar{0}, z \in L} f(z) = 0$ kaikilla origon kautta kulkevilla suorilla L,
   6. $\lim_{x \to \bar{0}} f(z)$ ei ole olemassa.

Vihjeet:

:(