MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Harjoitus 7
Käydään läpi pe 04.11.2011

Joihinkin tehtäviin löytyy vihjeitä sivun alareunasta. Jokaista tehtävää on mietittävä vähintään 10 minuttia (kellosta!) ennen kuin katsoo vinkkiä.

Näissä laskareissa on poikkeuksellisesti seitsemän tehtävää, koska edellisessä jaksossa puuttui yksi tehtävä.

1. Olkoon $f, g\colon X \to Y$ jatkuvia ja $A \subset X$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in A$ pätee $f(x) = g(x)$. Osoita, että jos $x \in \bar{A}$, niin $f(x) = g(x)$.
2. Olkoon $A \subset X$ epätyhjä. Osoita, että $\bar{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$.
3. Osoita, että jokainen äärellinen osajoukko $A \subset X$ on suljettu. Osoita, että jos X on äärellinen, niin sen kaikki osajoukot ovat avoimia.
4. (11:1) Oletetaan, että (x_n) ja (y_n) ovat jonoja ja että $x_n \to a$ ja $y_n \to b$. Osoita, että $d(x_n, y_n) \to d(a, b)$ suoraan kolmioepäyhtälön avulla.
5. (a) Osoita, että jokainen luonnollinen luku n voidaan yksikäsitteisesti esittää muodossa
$$n = 2^{n_1}(2n_2 - 1),$$
missä n_1 on luonnollinen luku tai nolla ja n_2 luonnollinen luku (> 0). (b) (11:3) Olkoon $x_n = \frac{n_1}{n_2}$, missä n_1 ja n_2 ovat näin määriteltyjä lukuja. Osoita, että jokainen epänegatiivinen reaaliluku on jonon (x_n) kasautumispiste.
6. Osoita, että (a) avaruudessa X on olemassa suppeneva jono jos ja vain jos $X \neq \varnothing$ ja (b) avaruudessa X on olemassa hajaantuva jono jos ja vain jos $\#X \geqslant 2$.
7. Olkoon $x_n = \sin(n\pi/2)$. Etsi jonosta (x_n) kolme suppenevaa osajonoa, jotka suppenevat kaikki kohti eri arvoja. Onko jonolla (x_n) muita suppenevia osajonoja?

Vihjeet:

Tehtävä 1: Käytä joko suoraan jatkuvuuden määritelmää tai sen karakterisaatiota “avoimen joukon alkukuva on avoin” sekä sulkeuman määritelmää.
Tehtävä 2: Muista todistaa molemmat suunnat.
Tehtävä 3: Äärellinen joukko on sellainen, jossa on äärellisen monta alkiota (ei ääretön), eli $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ jollain $n \in \mathbb{N}$.
Tehtävä 5: Voi käyttää halutessaan sitä, että jokaisella luonnollisella luvulla on yksikäsitteinen alkutekijähajoitelma.