

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Harjoitus 6
Käydään läpi pe 14.10.2011

Joihinkin tehtäviin löytyy vihjeitä sivun alareunasta. Jokaista tehtävää on mietittävä vähintään 10 minuttia (kellosta!) ennen kuin katsoo vinkkiä.

1. (6:13) Osoita, että $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin x \leq y \leq e^x\}$ on suljettu tasossa. Onko A rajoitettu?
2. (6:15) Osoita, että kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on jatkuva jos ja vain jos $\overline{f^{-1}B} \subset f^{-1}\overline{B}$ kaikilla joukoilla $B \subset Y$.
3. (6:11a) Osoita, että jatkuvan funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaaja on suljettu joukko tasossa.
4. (4:5) Olkoon kuvaus $f: X \rightarrow Y$ M -Lipschitz ja $g: Y \rightarrow Z$ N -Lipschitz. Osoita, että kuvaus $g \circ f$ on MN -Lipschitz.
5. (4:2) Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ joka ei ole Lipschitz.
6. Olkoon $A \subset X$ epätyhjä ja $r > 0$. Osoita, että $B(A, r) = \{x \mid d(x, A) < r\}$ on avoin ja $\overline{B}(A, r) = \{x \mid d(x, A) \leq r\}$ on suljettu.

Vihjeet:

Tehtävät 1 ja 3: Lause 6.13. Tehtävä 2: Saman tyyppinen lauseen 6.12 kanssa Tehtävä 6: Ensimmäinen osa löytyy kirjasta.