MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Harjoitus 5
Käydään läpi pe 07.10.2011

Joihinkin tehtäviin löytyy vihjeitä sivun alareunasta. Jokaista tehtävää on mietittävä vähintään 10 minuttia (kellosta!) ennen kuin katsoo vinkkiä.

1. (6:2) Osoita, että rationaalilukujen joukon sulkeuma on koko reaalilukujen joukko $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Osajoukkoja $Y \subset X$ joille $\bar{Y} = X$ kutsutaan *tiheiksi osajoukoiksi*. Anna esimerkki avoimesta tiheästä osajoukosta $A \subset \mathbb{R}$, joka ei kuitenkaan ole koko $\mathbb{R}$, eli $A \neq \mathbb{R}$.

2. Olkoon $X = \mathbb{Q}$ varustettuna Euklidisella metriikalla $d(x, y) = |x - y|$. Onko C suljettu ja/tai avoin kun

   (a) $C = \{x \mid 0 < x < 2\}$
   (b) $C = \{x \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$
   (c) $C = \{x \mid 0 \leqslant x\}$
   (d) $C = \{x \mid 0 \leqslant x < 1\}$

   Varusta vastaukset todistuksilla.

3. Olkoon $\mathrm{pr}_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ projektiofunktio $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j$, missä $1 \leqslant j \leqslant n$. Osoita, että jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, niin $fA \subset \mathbb{R}$ on avoin.

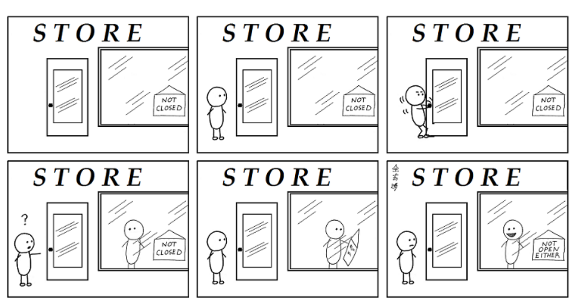
4. (5:3) Osoita, että jos jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ funktiot $f_i \colon X \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia, niin $h \colon X \to \mathbb{R}^n$, $h(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ on jatkuva.

5. Luennolla (to 29.09.2011) todistettiin lause, että tulofunktio $(x, y) \mapsto xy$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on jatkuva (lause ja todistus löytyvät kurssin kotisivulta, pdf:nä). Käyttämällä tätä ja edellistä tehtävää, todista, että yleisempi tulofunktio $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ on jatkuva kun $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$.

6. *Polynomi* on mikä tahansa funktio $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, joka on määritelty muutujista $x_1, \ldots, x_n$ lausekkeella, jossa esiintyy kerto- ja yhteenlaskua. Osoita, että kaikki polynomit ovat jatkuvia funktioita.

Vihjeet:

Tehtävä 2:



Scumbag topologist 'opens' a store.

Tehtävä 3: tämä muistuttaa Lausetta 4.7.
Tehtävä 4: voi käyttää lausetta 5.9.
Tehtävä 5: induktio luvun $m = k_1 + \cdots + k_n$ suhteen ja projektion jatkuvuus (5.6).
Tehtävä 6: tehtävät 5 ja 6 ja summafunktion jatkuvuus (luento 29.09.2011).