MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Harjoitus 4
Käydään läpi pe 30.09.2011

Joihinkin tehtäviin löytyy vihjeitä sivun alareunasta. Jokaista tehtävää on mietittävä vähintään 10 minuttia (kellosta!) ennen kuin katsoo vinkkiä.

1. Olkoon $X = \mathbb{R}$ varustettuna Euklidisella metriikalla $d(x, y) = |x - y|$. Onko $A \subset \mathbb{R}$ avoin joukko kun
   (a) $A = \{x \mid x < 0\}$,
   (b) $A = \{x \mid a < x < b\}$, missä $a < b$ ovat reaalilukuja,
   (c) $A = \mathbb{Q}$ rationaalilukujen joukko,
   (d) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$?

   Todista väitteesi suoraan avoimen joukon määritelmästä (3.1).
2. Olkoon $X = \mathbb{R}^2$ ja varustettuna Euklidisella metriikalla $d(x, y) = |x - y|$. Onko $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko kun
   (a) $A = \{(x, y) \mid x^2 < y^3 - xy\}$,
   (b) $A = \{(x, y) \mid 0 < x < 1\}$,
   (c) $A = \{(x, y) \mid xy = 0\}$?
3. (3:10) Metrisen avaruuden (X, d) pistettä $a \in X$ kutsutaan *erakkopisteeksi*, jos on olemassa reaaliluku $r > 0$ siten että $B(a, r) = \{a\}$. Osoita, että metrisen avaruuden erakkopisteiden joukko on avoin.
4. Olkoon $X = \mathbb{Q}$ rationaalilukujen joukko varustettuna Euklidisella metriikalla. Olkoon $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ määritelty seuraavalla tavalla: $f(x) = -1$, kun $x < \sqrt{2}$ ja $f(x) = 1$, kun $x > \sqrt{2}$. Osoita, että f on jatkuva. (Maalijoukossa myös Euklidinen metriikka)
5. (4:9) Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritelty yhtälöllä $f(x) = x^2$. Onko f jatkuva, kun
   (a) lähdössä on tavallinen (Euklidinen) metriikka ja maalissa $\{0, 1\}$-metriikka,
   (b) metriikat ovat päinvastoin kuin (a)-kohdassa.
6. (3:2) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin ja $z \in \mathbb{R}^2 \setminus A$. Voiko $A \cup \{z\}$ olla avoin? (Euklidinen metriikka.)

Vihjeet:

Tehtävässä 2 ja 4 saa käyttää Lausetta 4.8 sekä polynomifunktioiden $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuvuutta.