MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Harjoitus 3
Käydään läpi pe 23.09.2011

Joihinkin tehtäviin löytyy vihjeitä sivun alareunasta. Jokaista tehtävää on mietittävä vähintään 10 minuttia (kellosta!) ennen kuin katsoo vinkkiä.

1. Olkoon $X = \mathbb{R}^2$ ja $d(x, y) = |x - y|$ tavallinen Euklidinen metriikka. Määritä

   (a) $\bigcup_{k=1}^{\infty} B((k, 0), k)$,

   (b) $\bigcup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} B(x, 1)$,

   (c) $\bigcap_{x \in \mathbb{R}} \bigcup_{m=1}^{\infty} B\big((x, 0), \frac{1}{m}\big)$,

   (d) $\bigcap_{n=1}^{\infty} B\big((\frac{1}{m}, 0), \frac{1}{m}\big)$,

2. Jos $A \subset B$, osoita, että $d(A) \leqslant d(B)$. Anna esimerkki metrisestä avaruudesta (X, d) ja reaaliluvuista $r_1 < r_2$ ja $a \in X$ siten että $d(B(a, r_1)) = d(B(a, r_2)) < 2r_2$.

3. (a) Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ aidosti kasvava funktio ja olkoon d jokin metriikka reaaliluvuilla, eli $(\mathbb{R}, d)$ on metrinen avaruus. Olkoon $e\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritelty kaavalla $e(x, y) = d(f(x), f(y))$ Osoita, että e on metriikka $\mathbb{R}$:ssä.

   (b) Anna esimerkki funktiosta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, niin että e, kuten määritelty edellisessä tehtävässä, ei ole metriikka.

4. Olkoon X joukko, jonka alkioina ovat kaikki luonnollisten lukujen äärelliset osajoukot ja olkoon $d(x, y) = \#(x \triangle y)$ edellisten harjoitusten metriikka. Määritä

   (a) $d(\{x \in X \mid \max(x) \leqslant 1000\})$,
   (b) $d(B(\{3\}, 2), B(\{1\}, 2))$,
   (c) $d(B(\{1, 2\}, 2), B(\{3, 4\}, 2))$.

5. Olkoon $X = raj(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ kaikkien rajoitettujen funktioiden $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ joukko. Olkoon $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}^2\}$. Olkoon $g \in X$ funktio, jonka määrittelee kaava $g(x, y) = e^{-|x+y|}$. Kuuluuko g joukkoon

   (a) $B(\bar{0}, 1)$,
   (b) $\bar{B}(\bar{0}, 1)$,
   (c) $B(\bar{1}, 1)$?

   Tässä $\bar{0}$ on funktio joka saa arvokseen 0 kaikkialla ja $\bar{1}$ on funktio joka saa arvokseen 1 kaikkialla.

6. Olkoon $X = \mathbb{R}$ ja d Euklidinen metriikka $d(x, y) = |x - y|$. Päteekö

$$\frac{1}{2} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} B((-1)^m, 1) \ ?$$

Vihjeet

Ei vihjeitä tällä kertaa :(