MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Harjoitus 11
Käydään läpi pe 02.12.2011

Tällä kertaa tehtäviä on enemmän sitä varten, että ne olisivat helpompia. Ensi viikon laskareissa on vastaavasti vähemmän tehtäviä.

Olkoon $X = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ on kompakti ja epätyhjä}\}$. Jokaisilla $A_0, A_1 \in X$ määritellään reaalilukujen joukko

$$H(A_0, A_1) = \{r \mid A_1 \subset \bar{B}(A_0, r) \ \&\ A_0 \subset \bar{B}(A_1, r)\}$$

missä $\bar{B}(A, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) \leqslant r\}$. Viime laskareissa todistettiin, että kaikilla $A_0, A_1 \in X$ joukolla $H(A_0, A_1)$ on olemassa minimi ja että näin määritelty funktio $\delta(A_0, A_1) = \min H(A_0, A_1)$ on metriikka X:ssä. Nämä tiedot pidetään tunnettuina näissä laskareissa. Lisäksi näissä laskareissa saa käyttää Iivari Ylisen esittämää Heine-Borelin lausetta jonka mukaan joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu. Esitelmä on maanantaina 28.11.2011.

1. Osoita, että jos $A_i \subset \mathbb{R}^n$ ovat kompakteja kaikilla $i \in I$, niin $\bigcap_{i \in I} A_i$ on kompakti.
2. Olkoon $Z \subset X$ rajoitettu (X määritelty yllä). Osoita, että on olemassa sellainen r, että kaikilla $A \in Z$ pätee $A \subset B(\bar{0}, r)$.
3. Osoita, että jos $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ on jono X:n alkioita (eli kompakteja ja epätyjiä $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja) joille pätee $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, niin $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ on epätyhjä.
4. Olkoot $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ ja A kuten edellisessä tehtävässä ja $C \in X$. Oletetaan, että jollain $\varepsilon > 0$ pätee $\delta(C, A_i) \leqslant \varepsilon$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Osoita, että $\delta(C, A) \leqslant \varepsilon$.
5. Oletetaan, että $Z \subset X$ on rajoitettu. Osoita, että joukko $\overline{\bigcup Z} = \overline{\bigcup_{A \in Z} A}$ on kompakti.
6. Oletetaan, että $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono avaruudessa (X, δ). Osoita, että tällöin joukko
$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i}$$
on kompakti ja epätyhjä, eli $A \in X$.
7. Oletetaan, että Y on metrinen avaruus, (y_n) suppeneva jono Y:ssä ja $x \in Y$. Oletetaan lisäksi, että $y_n \to y$ ja $d(x, y_n) < r$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että $d(x, y) \leqslant r$.
8. Osoita, että edellisen tehtävän joukko A on jonon $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ raja-arvo. Päättele tästä, että (X, δ) on täydellinen metrinen avaruus.

Vihjeet:

1: Heine-Borel.

3: Täytyy löytää piste $a \in A$. Idea: määritellään jono, jonka raja-arvo on joukossa A. Valitaan jono $x_k \in \mathbb{R}^n$ jolle pätee $x_k \in A_\kappa$. Tällä jonolla on suppeneva osajono (miksi?). Ja koska jokaisella k jonon loppuhäntä on joukossa A_k (miksi?), niin sen raja-arvo a on jokaisessa näistä joukoista. Eli $a \in A$.

4: Edellisten laskareiden tehtävä 3 ja samanlainen jono kuin tehtävän 3 vihjeessä yllä.

5: Käytä tehtävää 2.

6: Käytä kompaktiuteen tehtäviä 1 ja 5 sekä edellisten laskareiden tehtävää 1. Epätyhjyyteen taas tehtävää 3, nimittäin jos asetetaan $B_k = \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i}$, niin $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots$ ja toisaalta $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$.

7: Käytä funktion $y \mapsto d(x, y)$ jatkuvuutta.

8: Olkoon $\varepsilon > 0$. Riittää löytää sellainen n_ε, että $\delta(A_i, A) < \varepsilon$ kaikilla $i > n_\varepsilon$. Siitä että jono on Cauchy saadaan n_ε s.e. kaikilla $i, j > n_\varepsilon$ pätee $\delta(A_i, A_j) < \varepsilon$. Tästä seuraa $\delta(A_i, \overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j}) < \varepsilon$ (sovella tähän edellistä tehtävää sekä edellisten laskareiden tehtävää 5) ja nyt sovella tehtävää 4.