MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Harjoitus 10
Käydään läpi pe 25.11.2011

Joihinkin tehtäviin löytyy vihjeitä sivun alareunasta. Jokaista tehtävää on mietittävä vähintään 10 minuttia (kellosta!) ennen kuin katsoo vinkkiä.

1. (12:2) Osoita, että Cauchyn jono on aina rajoitettu, eli $d(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}) < \infty$ kun (x_n) on Cauchyn jono.
2. (12:3) Todista että metrisen avaruuden täydellinen osajoukko on suljettu.

Olkoon $X = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ on kompakti ja epätyhjä}\}$. Jokaisilla $A_0, A_1 \in X$ määritellään reaalilukujen joukko

$$H(A_0, A_1) = \{r \mid A_1 \subset \bar{B}(A_0, r) \;\&\; A_0 \subset \bar{B}(A_1, r)\}.$$

3. Osoita, että jos $x \in H(A_0, A_1)$ ja $y > x$, niin $y \in H(A_0, A_1)$.
4. Osoita, että $H(A_0, A_1)$ on suljettu, eli on olemassa $\min H(A_0, A_1)$.
5. Jokaisilla $A_0, A_1 \in X$ määritellään $\delta(A_0, A_1) = \min H(A_0, A_1)$. Osoita, että $\delta(A_0, A_1) = r$ jos ja vain jos jokaisella $a_0 \in A_0$ löytyy sellainen $a_1 \in A_1$, että $d(a_0, a_1) \leqslant r$ ja jokaisella $a_1 \in A_1$ löytyy sellainen $a_0 \in A_0$, että $d(a_0, a_1) \leqslant r$.
6. Osoita, että δ on metriikka X:ssä.

Vihjeet:

Tehtävä 4: Aiemmin on todistettu, että $\bar{B}(A, r)$ on suljettu joukko (lask. 6 teht. 6). Käyttämällä tätä tietoa, osoita, että joukon $H(A_0, A_1)$ komplementti on avoin.
Tehtävä 5: Käytä Lausetta 13.22 joukkoihin $\{a_0\}$ ja A_0.
Tehtävä 6: Ehtoa M1 todistaessa käytä edellistä tehtävää ja ehtoa M3 todistaessa lask. 7. tehtävää 2 ja sitä, että A_0 ja A_1 ovat suljettuja (seuraa Lauseesta 13.6) ja rajoitettuja (Lause 13.11).

Huomautus:

Tehtävät 3-6 ovat osa tehtäväsarjaa joka jatkuu ensi viikolla ja jonka tähtäimessä on lause, joka kertoo tiettyjen itsesimilaarien fraktaalien olemassaolosta.