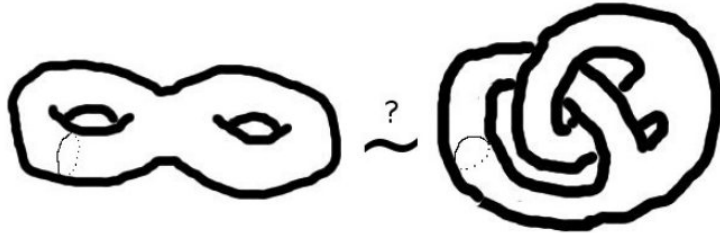


MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
 Topologia I (opettajalinjan työpaja)
 Harjoitus 1
 Käydään läpi pe 09.09.2011

Joihinkin tehtäviin löytyy vinkkejä sivun alareunasta. Jokaista tehtävää on mietittävä vähintään 10 minuttia (kellosta!) ennen kuin katsoo vinkkiä.

1. Onko pretzel-pinta mahdollista muokata jatkuvalla muunnoksella linkittyneeksi pretzel-pinnaksi?



2. Todista de Morganin lait: olkoon X joukko ja $A_j \subset X$ kaikilla $j \in J$, missä J on jokin indeksijoukko. Tällöin

$$X \setminus \bigcup_{j \in J} A_j = \bigcap_{j \in J} (X \setminus A_j) \text{ ja } X \setminus \bigcap_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J} (X \setminus A_j)$$

3. Olkoon $f: X \rightarrow Y$ funktio.

- (a) Jos $A, B \subset X$, päteekö välttämättä $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$?
 (b) Jos $A, B \subset Y$, päteekö välttämättä $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$?

4. Osoita, että jos $f: X \rightarrow Y$ on funktio ja $A_i \subset X$, $i \in I$, niin

(a) $f\left[\bigcup_{i \in I} A_i\right] = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$

(b) $f\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] \subset \bigcap_{i \in I} f[A_i]$

- (c) Olkoon $B \subset Y$, päteekö välttämättä $f^{-1}[Y \setminus B] = X \setminus f^{-1}B$?

5. Olkoon $f: X \rightarrow Y$. Osoita, että

- (a) f on injektio jos ja vain jos $f^{-1}fA = A$ kaikilla $A \subset X$,
 (b) f on surjektio jos ja vain jos $ff^{-1}A = A$ kaikilla $A \subset Y$.

6. (1:5) Todista, että $|x|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ on normi \mathbb{R}^n :ssä. Tässä $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Vinkit

Tehtävä 1: on mahdollista.