MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Ratkaisuehdotukset harjoitukseen 9
Käytiin läpi pe 18.11.2011

1. (9:3) Osoita, että "olla homeomorfinen" on ekvivalenssirelaatio metristen avaruuksien luokassa.

   Ratkaisu. Refleksiivisyys. Täytyy osoittaa, että jokainen metrinen avaruus on homeomorfinen itsensä kanssa. Olkoon X mikä tahansa metrinen avaruus ja $f\colon X \to X$ identtinen kuvaus, eli $f(x) = x$. Osoitetaan, että f on homeomorfismi. Jos U on avoin X:ssä, niin $f^{-1}[U] = U$, eli sen alkukuvakin on avoin. f on siis jatkuva. Selvästi f on bijektio ja sen käänteiskuvaus on myös identtinen, joten sekin on jatkuva.

   Symmetrisyys. Täytyy osoittaa, että jos $X \approx Y$, niin $Y \approx X$. Oletetaan, että $f\colon X \to Y$ on homeomorfismi. Silloin $f^{-1}\colon Y \to X$ on jatkuva (koska homeomorfismin käänteiskuvaus on jatkuva määritelmän mukaan), f^{-1} on bijektio, koska f on bijektio ja $(f^{-1})^{-1} = f$ on myös jatkuva. Siispä f^{-1} on homeomorfismi Y:stä X:n, eli $Y \approx X$.

   Transitiivisuus. Oletetaan, että $X \approx Y$ ja $Y \approx Z$, eli on olemassa homeomorfismit $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to Z$. Täytyy todistaa, että on olemassa homeomorfismi $X \to Z$. Olkoon $h = g \circ f$. Koska f ja g ovat jatkuvia, on h jatkuva (4.12). Koska f ja g ovat bijektioita, on h bijektio (Analyysi I?). Kuvauksen h käänteiskuvaus on täten $f^{-1} \circ g^{-1}$. Koska f ja g ovat homeomorfismeja, ovat f^{-1} ja g^{-1} jatkuvia, joten h^{-1} on näiden yhdisteenä jatkuva. Siispä h on homeomorfismi.

2. (9:2) Onko kirjan kannessa oleva kuva Jordanin käyrä?

   Ratkaisu. Ei, koska se on epäyhtenäinen, eli ei voi olla ympyrän homeomorfinen kuva, sillä ympyrä on yhtenäinen.

3. Osoita, että $\mathbb{R}$ on homeomorfinen (a) avoimen välin $]0,1[$ kanssa. (b) avoimen välin $]0,\infty[$ kanssa.

   Ratkaisu. (a) Olkoon $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$. Nyt nimittäjä on aina positiivinen ja funktio f on aidosti vähenevä, mikä nähdään esimerkiksi katsomalla derivaattaa: $D\frac{1}{e^x+1} = \frac{-e^x}{(e^x+1)^2} < 0$, joten se on injektio ja toisaalta $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x+1} = 0$ ja $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x+1} = 1$, joten se on myös surjektio välille $]0,1[$. Sen käänteisfunktio on $\ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$, joka on myös jatkuva välillä $]0,1[$, joten f on homeomorfismi.

(b) Olkoon $f(x) = e^x$. Nyt $f\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$ on selvästi jatkuva bijektio, jonka käänteiskuvaus $\ln x$ on myös jatkuva, eli f on homeomorfismi.

Koska kaikki avoimet välit $]a,b[$ ja $]c,d[$ ovat keskenään homeomorfisia, ovat ne kaikki homeomorfisia välin $]0,1[$ kanssa. Tämä on puolestaan homeomorfinen koko reaalilukujen avaruuden $\mathbb{R}$ kanssa (a)-kohdan nojalla, joka taas on homeomorfinen välin $]0,\infty[$ kanssa. Nämä ovat kaikki siis keskenään homeomorfisia tehtävän 1 nojalla. Lisäksi translaatio $f(x) = x + a$ on homeomorfismi avaruuksien $]0,\infty[$ ja $]a,\infty[$ välillä sekä $g(x) = -x$ on homeomorfismi avaruuksien $]0,\infty[$ ja $]-\infty,0[$ välillä. Näin saadaan, että kaikki avoimet välit (rajoitetut ja rajoittamattomat) ovat keskenään homeomorfisia. Huom: kaikki avoimet joukot *eivät* kuitenkaan ole keskenään homeomorfisia: esim $]0,1[\not\approx]0,1[\cup]2,3[$.

4. Olkoon $A = \{(x,y) \mid x^2 + 5y^2 < 1\}$. Määritä $\operatorname{int} A$, $\operatorname{ext} A$ ja ∂A.

Ratkaisu. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ määritelty yhtälöllä $f(x,y) = x^2+5y^2-1$. Funktio f on polynomina jatkuva, joten $A = f^{-1}\{z \in \mathbb{R} \mid z < 0\}$ on avoimen joukon alkukuvana avoin. Sisäpisteiden joukko on niiden A:n pisteiden joukko, joilla on avoin ympäristö joka sisältyy A:han. Koska A on avoin, on tämä suoraan määritelmän nojalla täsmälleen omien sisäpisteidensä joukko, eli $A = \operatorname{int} A$.

Todistetaan seuraavaksi, että $f^{-1}\{0\} = \partial A$. Oletetaan, että $f(x,y) = 0$. Olkoon $r > 0$ ja tutkitaan kuulaa $B((x,y),r)$. Olkoon $p = \frac{|(x,y)|-r/2}{|(x,y)|}$. Nyt piste (px,py) on kuulassa $B((x,y),r)$, koska

$$d((x,y),(px,py))^2 = (x-px)^2+(y-py)^2 = x^2\Big(\frac{r/2}{|(x,y)|}\Big)^2+y^2\Big(\frac{r/2}{|(x,y)|}\Big)^2 = (r/2)^2 < r^2,$$

eli $d((x,y),(px,py)) < r$. Toisaalta $f(px,py) = (px)^2 + 5(py)^2 - 1 < 0$, koska $p < 1$ ja $f(x,y) = 0$. Näin siis $(px,py) \in A \cap B((x,y),r)$. Toisaalta, (x,y) on itse piste, joka on joukossa $A^c \cap B((x,y),r)$.

Näin saimme, että jokainen pisteen (x,y) kuulaympäristö $B((x,y),r)$ leikkaa sekä joukkoa A että sen komplementtia, eli $(x,y) \in \partial A$.

Täten $f^{-1}\{0\} \subset \partial A$. Olkoon nyt $(x,y) \in \partial A$. Jos olisi $f(x,y) > 0$, niin pisteellä $f(x,y)$ on avoin ympäristö $]0,\infty[$, jonka alkukuva on avoin pisteen (x,y) ympäristö, joka on joukon A ulkopuolella, joten (x,y) on ulkopiste eikä reunapiste. Jos olisi $f(x,y) < 0$, niin (x,y) olisi vastaavasti sisäpiste eikä reunapiste. Täten on oltava $f(x,y) = 0$, $\partial A \subset f^{-1}\{0\}$.

Koska $\operatorname{int} A = f^{-1}]-\infty,0[$ ja $\partial A = f^{-1}\{0\}$ ja $\mathbb{R}^2 = \operatorname{int} A \cup \partial A \cup \operatorname{ext} A$, on oltava $\operatorname{ext} A = f^{-1}]0,\infty[$. Toisin sanoin

$$\operatorname{int} A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 5y^2 < 1\}$$

$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 5y^2 = 1\}$$
$$\operatorname{ext} A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 5y^2 > 1\}$$

5. Olkoon $A \subset X$ suljettu. Osoita, että jos $E \subset A$ on suljettu A:ssa, niin se on suljettu X:ssä

   Ratkaisu. E on suljettu A:ssa, tarkoittaa sitä, että $A \setminus E$ on avoin A:ssa, mikä Lauseen 7.2 mukaan tarkoittaa sitä, että on olemassa avoin $V \subset X$, jolle $V \cap A = A \setminus E$. Koska A on suljettu, $X \setminus A$ on avoin ja kahden avoimen yhdiste $U = (X \setminus A) \cup V$ on avoin. Toisaalta jos $x \in X \setminus U$, niin $x \notin U$, eli $x \notin (X \setminus A) \cup V$, eli $x \in A \setminus V$, eli $x \in E$ ja jos $x \in E$, niin $x \in A \setminus V$, eli $x \notin (X \setminus A) \cup V = X \setminus U$. Joukko U on siis joukon E komplementti. Koska se on avoin X:ssä, E on suljettu X:ssä.

6. Merkitään B^2 tason avointa yksikkökuulaa $B^2 = B((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ Tutki seuraavista joukoista $A \subset B^2 \subset \mathbb{R}^2$, mitkä niistä ovat suljettuja B^2:ssa.

   (a) $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1\}$

   (c) $A = \{(x, 0) \in B^2 \mid x + y > 1\}$

   Ratkaisu. (a) A on suljettu B^2:ssa. Tämän todistamista varten täytyy näyttää, että $B^2 \setminus A$ on avoin B^2 ja tätä varten riittää löytää avoin joukko $U \subset \mathbb{R}^2$ s.e. $U \cap B^2 = B^2 \setminus A$. Tämä on helppoa: valitaan $U = \{(x, y) \mid y \neq 0\}$. Tämä on avoin vaikkapa sen takia, että se on projektiokuvauksen $(x, y) \mapsto y$ alkukuva joukosta $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (c) Joukko A on avoin B^2:ssa. Olkoon $f(x, y) = x + y$, $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se on jatkuva kuvaus, koska se on polynomi, joten $f^{-1}\{z \in \mathbb{R} \mid z > 1\}$ on avoimen joukon alkukuvana avoin ja toisaalta $A = B^2 \cap f^{-1}\{z \in \mathbb{R} \mid z > 1\}$, ks. Lause 7.2.

7. Oletetaan, että $X \approx Y$. Osoita, että X on kompakti jos ja vain jos Y on kompakti.

   Ratkaisu. Koska homeomorfismin käänteiskuvaus on homeomorfismi, riittää todistaa vain toinen suunta, eli jos $f \colon X \to Y$ on homeomorfismi, ja X on kompakti, niin Y on kompakti. Silloin nimittäin, jos Y on kompakti, niin $f^{-1} \colon Y \to X$ on homeomorfismi ja edellisen nojalla X on kompakti, eli saadaan ekvivalenssi. Olkoon siis $f \colon X \to Y$ homeomorfismi ja X kompakti ja todistetaan, että Y on kompakti. Itse asiassa riittää olettaa, että f on jatkuva, mutta teemme sen nyt kuitenkin homeomorfismille, koska se on hiukan helpompaa. Olkoon (y_n) jono Y:ssä. Haluamme poimia siitä suppenevan osajonon. Olkoon $x_n = f^{-1}(y_n)$. Nyt (x_n) on jono X:ssä ja koska X on kompakti, sillä on olemassa osajono $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, joka suppenee kohti jotain pistettä a. Koska f on jatkuva, niin jono $f(x_{n_k})$ suppenee kohti pistettä $f(a)$ (Lause 11.8). Toisaalta $f(x_{n_k}) = f(f^{-1}(y_{n_k})) = y_{n_k}$, eli se on jonon (y_n) suppeneva osajono.